



Stichworte: Partielle Ableitung, totale Ableitung, Kettenregel

7. Ableitung entlang einer Kurve (5 Punkte)

Bestimmen Sie die Ableitung der Funktion

$$f(x, y) = x^2 y^3$$

entlang des Weges $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ mit

$$x(t) = \frac{a\sqrt{2} \cos(t)}{\sin(t)^2 + 1}; \quad y(t) = \frac{a\sqrt{2} \cos(t) \sin(t)}{\sin(t)^2 + 1} .$$

Bemerkung: Diese Parametrisierung beschreibt eine *Lemniskate*, eine 'liegende Acht'.

8. Extrema unter Nebenbedingungen: Lagrange-Multiplikatoren (10 Punkte)

Die Methode der Lagrange-Multiplikatoren dient der Bestimmung von Extrema unter gegebenen Nebenbedingungen. Wir betrachten zwei einfache Beispiele:

- (a) Ein Rechteck, das unter allen Rechtecken gleichen Umfangs maximale Fläche besitzt, hat auch bei gegebener Fläche minimalen Umfang. Zeigen Sie dies, und zwar
 - i. direkt, d.h. indem Sie einmal die Fläche F als Funktion des Umfangs U und einer Seitenlänge a ausdrücken bzw. entsprechend U als Funktion von F und a , und dann das Extremum der Funktion *einer* Variablen auswerten,
 - ii. durch Verwendung Lagrangescher Multiplikatoren.
- (b) Maximieren Sie das Volumen eines Quaders, der gerade in das Innere des durch

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

definierten Ellipsoids paßt. Zeigen Sie, daß das Verhältnis des maximalen Volumens zum Volumen des Ellipsoids $2/(\sqrt{3}\pi)$ ist.

Tipp: Zur Vereinfachung der Rechnung können Sie einen verschobenen Ellipsoiden betrachten, so dass $x, y, z > 0$ gilt.