INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

Prof. Dr. U. Motschmann
Dipl.-Phys. H. Kriegel

PHYSIKALISCHE RECHENMETHODEN II — SS 2010

0. Übungsblatt — Abgabe: keine (Präsenzübung)

Fragen zu den Aufgaben: H. Kriegel, Raum A317, Tel.: 391-5187, h.kriegel@tu-bs.de

Stichworte: Umkehrfunktionen, Taylor-Reihen, Integrale

4. **Ableitung der Umkehrfunktion**

Zwischen einer Funktion f und ihrer Umkehrfunktion $\bar{f}$ bestehen die Beziehungen

$$f\left(\bar{f}(x)\right) = x \quad \text{und} \quad \bar{f}\left(f(x)\right) = x \quad . \tag{1}$$

(a) Zeigen Sie zunächst *allgemein*, dass die Ableitungen einer Funktion f und ihrer Umkehrfunktion $\bar{f}$ durch

$$\bar{f}'(x) = \frac{1}{f'\left(\bar{f}(x)\right)} \tag{2}$$

gegeben sind.

Wir betrachten nun die Umkehrfunktionen von Sinus, Cosinus und Tangens.

(b) Die Umkehrfunktion von $f(x) = \sin x$ $(-\pi/2 < x < +\pi/2)$ heißt Arcussinus (arcsin). Zeigen Sie, dass die Ableitung dieser Funktion durch

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \tag{3}$$

gegeben ist.

(c) Die Umkehrfunktion von $f(x) = \cos x$ $(0 < x < \pi)$ heißt Arcuscosinus (arccos). Zeigen Sie:

$$\arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad . \tag{4}$$

(d) Zeigen Sie, dass die erste Ableitung des Arcustangens durch

$$\arctan'(x) = \frac{1}{x^2+1} \tag{5}$$

gegeben ist.

Bitte wenden ⟶

5. **Taylor-Reihen I**

   Entwicklen Sie die folgenden Funktionen jeweils in eine Taylor-Reihe um $x = 0$:

   (a) $f(x) = \sin x$
   (b) $f(x) = \cos x$
   (c) $f(x) = \arctan x \quad , \quad |x| < 1$
   (d) $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2} \quad , \quad |x| < 1$
   (e) $f(x) = \ln(1 - 2x) \quad , \qquad , \quad |x| < \frac{1}{2}$

6. **Unbestimmte Integrale**

   Lösen Sie die folgenden unbestimmten Integrale, ohne Integraltafeln o.ä. zu verwenden:

   (a) $\displaystyle\int \frac{1}{3} x^2 e^{-x+1}\,\mathrm{d}x$

   (b) $\displaystyle\int \frac{1}{3} x e^{x^2+1}\,\mathrm{d}x$

   (c) $\displaystyle\int x^2 \cos(2x)\,\mathrm{d}x$

   (d) $\displaystyle\int \frac{\cos(x)}{\sqrt{\sin^3(x)}}\,\mathrm{d}x$

   (e) $\displaystyle\int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\,\mathrm{d}x$