Blatt 12

Aufgabe 1: Separation der Variablen (10 Punkte)

Lösen Sie die gewöhnliche Differentialgleichung

$$y(x)y'(x) + xy^2(x) - 8x = 0$$

durch Separation der Variablen fur die Anfangsbedingung $y(1) = 3$.

Aufgabe 2: Variation der Konstanten (10 Punkte)

Lösen Sie die lineare Differentialgleichung

$$y'(x) + y(x)\cos x - \sin 2x = 0$$

durch Variation der Konstanten.

Aufgabe 3: Homogene Differentialgleichung (10 Punkte)

Betrachten Sie die Differentialgleichung

$$x^2y'(x) + \left(y^2(x) - xy(x)\right) = 0.$$

a) Bringen Sie die Gleichung auf die Form

$$y'(x) = f(y, x)$$

und zeigen Sie, dass $f(x, y)$ homogen vom Grad 0 ist.

b) Benutzen Sie eine geeignete Transformation um die Gleichung zu lösen und geben Sie die allgemeine Lösung an.

Aufgabe 4: Systeme von Differentialgleichungen (10 Punkte)

Die Magnetisierung $\vec{M}$ einer Wolke von Atomen im konstanten Magnetfeld $\vec{B}$ kann durch die Bloch-Gleichung

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \gamma\vec{M} \times \vec{B} - \frac{1}{\tau}\vec{M},$$

beschrieben werde, wobei γ die Stärke der Kopplung der Magnetisierung an das externe Magnetfeld und τ die Relaxationszeit ist.

a) Stellen Sie die Bewegungsgleichung in der Form

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix}$$

mit $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ auf.

b) Lösen Sie die Bloch-Gleichung für $\vec{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T$. Wählen Sie als Anfangsbedingung bei $t = 0$ eine Magnetisierung von $\vec{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T$.

Aufgabe 5: Gedämpfter Harmonischer Oszillator (10 Punkte)

Der gedämpfte harmonische Oszillator wird beschrieben durch

$$u''(x) = -\gamma u'(x) - \omega_0^2 u(x),$$

wobei u die Auslenkung, γ die Dämpfungskonstante und ω_0 die Frequenz des ungedämpften Systems ist.

i) Schreiben Sie diese Differentialgleichung 2. Ordnung um in ein System von linearen Differentialgleichungen 1.Ordnung und entkoppeln Sie diese Gleichungen.

ii) Geben Sie die Lösung für ein anfangs in Ruhe befindliches System mit $u(0) > 0$ an. Für welche Dämpfungen kommt ein oszillierendes Verhalten vor?