

Blatt 11

Aufgabe 1: Diracsche Deltafunktion

(15 Punkte)

- a) Zeigen Sie ausgehend von der definierenden Eigenschaft der δ -Funktion

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x) dx = f(0)$$

und der Heaviside-Funktion

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \theta(x) dx = \int_0^{\infty} f(x) dx$$

folgende Eigenschaften.

- i) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x-a) dx = f(a)$
- ii) $\delta(-x) = \delta(x)$ und $\delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x)$ mit $a \in \mathbb{R}$
- iii) $\int_{-\infty}^{\infty} g(x) \delta(f(x)) dx = \sum_i g(x_i) \frac{1}{|f'(x_i)|}$ wobei die Summe über die Nullstellen x_i von f geht.
- iv) $\frac{d}{dx} \theta(x) = \delta(x)$

- b) Eine alternative Definitionen der δ -Distribution verwendet Dirac-Folgen. Eine Folge von Funktionen $\phi_k(x)$ von integrierbaren Funktionen heißt Dirac-Folge wenn

$$\phi_k \geq 0 \quad \int_{-\infty}^{\infty} \phi_k(x) dx = 1$$

und für alle $\epsilon > 0$ folgt

$$\int_{\mathbb{R} \setminus [-\epsilon, \epsilon]} \phi_k(x) dx \rightarrow 0 \text{ für } k \rightarrow \infty.$$

- i) Zeigen Sie, dass man die δ -Distribution durch

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f(x) \phi_k(x) dx = \int_{\mathbb{R}} f(x) \delta(x) dx$$

definiert werden kann.

- ii) Konstruieren Sie zwei Dirac-Folgen und überprüfen Sie ihre Eigenschaften.

Aufgabe 2: Fouriertransformation und Fourierreihe

(10 Punkte)

- a) Zeigen Sie, dass die Folge δ_k , die definiert ist durch

$$\delta_k(x) = \sum_{n=-k}^k e^{ikx}$$

zwar keine Dirac Folge ist, aber im Sinne von Aufgabe 1 b) i) eine periodische δ -Funktion definiert.

- b) Berechnen Sie die Fourier Transformation von

$$g(x) = \begin{cases} A & \text{für } 0 \leq x < \tau/2 \\ -A & \text{für } -\tau/2 \leq x < 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- c) Zeigen Sie für $a \in \mathbb{R}$

$$FT(f(x+a))(\omega) = e^{ia\omega} FT(f(x))(\omega).$$

- d) Benutzen Sie Aufgabenteile b) und c) um die Fourierreihe von Zettel 9 zu bestimmen.

Aufgabe 3: Faltungstheorem und Fouriertransformation

(25+10 Punkte)

Es seien zwei Funktionen definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} 1+x & \text{für } -1 \leq x < 0 \\ 1-x & \text{für } 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 1-x^2 & \text{für } -1 \leq x < 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

- a) Berechnen Sie die Faltung

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(\tau)g(x - \tau)dx.$$

- b) Berechnen Sie die Fouriertransformation von g und f .
c) Geben Sie die Fouriertransformation der Faltung an¹.
d) (10 Zusatzpunkte) Überprüfen Sie analytisch oder numerisch, ob Ihre Ergebnisse a)-c) das Faltungstheorem erfüllen.

¹Sie können Ihr Ergebnis aus b) verwenden.