Blatt 10

Aufgabe 1: Tschebyscheff-Polynome (15 Punkte)

Es sei I ein Interval auf $\mathbb{R}$ und $\omega(x)$ eine stetige Funktion auf I mit $\omega(x) > 0$. Ein Skalarprodukt für zwei Funktionen f und g aus einem passenden Funktionsraum sei definiert durch

$$\langle f, g\rangle = \int_I f(x)g(x)\omega(x)\, dx.$$

a) Zeigen Sie, dass dieses Skalarprodukt wirklich alle eigenschaften eines Skalarproduktes erfüllt.

Die Tschebyscheff-Polynome sind definiert als

$$p_n(x) = \cos(n \arccos(x)).$$

b) Überzeugen Sie sich davon, dass die Tschebyscheff-Polynome Polynome in x sind indem Sie die ersten vier ausrechnen.

c) Zeigen Sie, dass die Tschebyscheff-Polynome für

$$\omega(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad I = [-1, 1]$$

einen bezüglich des obigen Skalarproduktes orthogonalen Satz von Funktionen bilden.

d) Zeigen Sie, dass für die Tschebyscheff-Polynome die Rekursionsrelation

$$p_n(x) = 2x p_{n-1}(x) - p_{n-2}(x)$$

gilt.

Aufgabe 2: Analytische Funktionen von Matrizen (20 Punkte)

Eine Analytische Funktion f kann man in einer Potenzreihe $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n$ mit Koeffizienten f_n entwickeln. Man kann nun diese Funktion auch auf Matrizen wirken lassen indem man

$$f(M) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n M^n \tag{1}$$

definiert, wobei M^n das n-fache Matrixprodukt bezeichnet und $M^0 = \mathbb{1}$ die Einheitsmatrix ist. Berechnen Sie

$$\exp(\theta R) \qquad \text{für} \qquad R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Gehen Sie dazu folgendermaßen vor:

a) Berechnen Sie die Eigenwerte und die normierten Eigenvektoren von R.

b) Bestimmen Sie die Basisswechselmatrix.

   i) Bestimmen Sie dazu die Basiswechselmatrix U aus der Eigenbasis in die Standardbasis. Benutzen Sie dazu die normierten Eigenvektoren. Zeigen Sie, dass

   $$U \circ U^\dagger = \mathbb{1}$$

   ist.

ii) Bestimmen Sie U^{-1} und stellen Sie R als

$$R = U \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^* \end{pmatrix} U^{-1}$$

dar.

c) Benutzen Sie diese Zerlegung um

$$\exp(\theta R) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\theta)^n}{!n} R^n$$

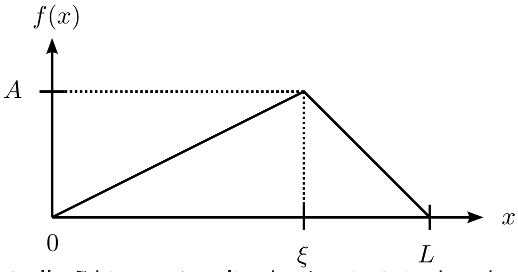
zu berechnen.

Aufgabe 3: Die gezupfte Saite (15+15 Punkte)

Die Eigenmoden einer Saite der Länge L, die bei $t = 0$ in Ruhe ist, sind

$$u_n(x) = A_n \sin(\pi n x / L) \cos(2\pi f_n t),$$

wobei $f_n = n f_0$ die Frequenz der Schwingung, f_0 die Frequenz der Grundschwingung und A_n eine Amplitude ist.



Die Saite wird langsam gezupft. Dazu zieht man mit dem Finger an der Stelle ξ bis zur Amplitude A. Die Saite hat dann eine Auslenkung $f(x)$ wie in der Skitze. Bevor man nun loslässt sei die Saite in Ruhe.

a) Geben Sie die Funktion $f(x)$ in Abhängigkeit von ξ und A an.

b) Stellen Sie die Amplitude bei $t = 0$ als Summe der Eigenmoden dar. Geben Sie das entstehende Frequenzspektrum an.

c) (15 Zusatzpunkte) Stellen Sie die zeitliche Entwicklung der Amplitude für $\xi = L/3$ und $\xi = L/2$ und jeweils $0 < t < 2/f_0$ dar. Wählen Sie passende einheitenlose Größen.