Blatt 9

Aufgabe 1: Legendre Polynome (20 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Legendre-Polynome $P_n(x)$ ein orthogonales System auf dem Intervall $[-1,1]$ bilden, d.h. dass gilt

$$\langle P_n, P_m\rangle = \int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)\,dx = \frac{2}{2n+1}\delta_{mn}.$$

Verwenden Sie zur Lösung partielle Integration und die Darstellung der Legendre- Polynome durch die Formel von Rodriguez

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n.$$

Ausserdem darf die Lösung des Integrals

$$\int_{-1}^{1}(x^2-1)^n\,dx = (-1)^n\frac{2^{2n+1}n!^2}{(2n+1)!}$$

verwendet werden.

Aufgabe 2: Cauchy-Schwarzsche Ungleichung (15 Punkte)

Im Raum $\mathbb{L}^2$ der quadratintegrablen Funktionen (z.B. Wellenfunktionen der Quantenmechanik) ist das Skalarprodukt definiert durch

$$\langle f, g\rangle = \int_{-\infty}^{\infty}\overline{f(x)}g(x)\,dx.$$

Für das Produkt gilt die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung

$$|\langle f, g\rangle|^2 \leqslant \langle f, f\rangle\langle g, g\rangle.$$

Rechnen Sie die Ungleichung für die beiden Funktionen

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \qquad\qquad g(x) = xe^{-x^2}$$

nach. Bei der Lösung der Integrale hilft Ihnen evtl. die sogenannte Gamma-Funktionen

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}.$$

Die Gamma-Funktion ist die Verallgemeinerung der Fakultät und erfüllt die Funktionalgleichung $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. Des weiteren ist $\Gamma(1) = 1$ und $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$. Damit sollten Sie in der Lage sein alle Integrale zu berechnen.

Aufgabe 3: Fourier-Entwicklung (15 Punkte)

Funktionen $f(x)$, die in den Grenzen $[a,b]$ periodisch sind, können mithilfe der Fourier-Reihe als Summe trigonometrischer Funktionen dargestellt werden (Fourierentwicklung):

$$FR(f) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(n\omega x) + b_n\sin(n\omega x).$$

Dabei ist $\omega = 2\pi/T = 2\pi/(b-a)$ die Kreisfrequenz mit der Periode $T = b-a$. Die Koeffizienten a_n ($n \geqslant 0$) und b_n ($n \geqslant 0$) erhält man durch

$$a_n = \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\cos\left(\frac{2\pi nx}{b-a}\right) \qquad\qquad b_n = \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\sin\left(\frac{2\pi nx}{b-a}\right)$$

a) Benutzen Sie die Euler-Identität um die Fourierreihe in ihre komplexe Form

$$FR(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp\left(i\,\frac{2\pi n x}{b-a}\right)$$

zu bringen. Bestimmen Sie c_n aus a_n und b_n.

b) Bestimmen Sie die Fourierentwicklung der periodisch fortgesetzten Stufenfunktion

$$f(x) = \begin{cases} A & x \geqslant 0 \\ -A & x < 0 \end{cases} \quad \text{für } x \in (-\tau/2, \tau/2)$$

c) Plotten Sie die Fourierentwicklung für $\tau = 2$ und $A = 1$ über mindestens zwei Perioden mit 2, 4 und 64 Summanden. Benutzen Sie ein geeignetes Programmpaket Ihrer Wahl.