Blatt 8

Aufgabe 1: Berechnung von Determinanten (5 Punkte)

Auf Zettel 7 war das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 &= 1 \\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_4 &= 2 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 &= 3 \\ x_1 - x_4 &= 4. \end{aligned}$$

gegeben. Es wurde die Matrix $A \in \mathbb{M}(4,4,\mathbb{R})$ bestimmt, so dass sich das Gleichungssystem schreiben lässt als $Ax = y$. Berechnen Sie $\det A$.

Aufgabe 2: Eigenschaften von Determinanten (15 Punkte)

a) Seien $j, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $j \leq n$, $a_{ij}, b_{ij} \in \mathbb{R}$ und $A, B \in \mathbb{M}(n,n,\mathbb{R})$. Gehen Sie von der Definition der Determinante von Leibniz bzw. dem Laplaceschen Entwicklungssatz aus und zeigen Sie folgende Aussagen[1]:

i) $$\det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{j,1} & \dots & \lambda a_{j,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \lambda \det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j,1} & \dots & a_{j,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

ii) $$\det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{j1} + a_{j1} & \dots & b_{j,n} + a_{j,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j,1} & \dots & a_{j,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{j,1} & \dots & b_{j,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

iii) Wenn A und B durch vertauschen zweier Zeilen auseinander hervor gehen ist $\det A = -\det B$.

iv) Wenn A zwei gleiche Zeilen hat ist $\det A = 0$.

v) Wenn die Zeilenvektoren linear abhängig sind ist $\det A = 0$.

vi) $\det A = \det A^T$

b) Beweisen Sie für $A, B \in \mathbb{M}(n,n,\mathbb{R})$ den Determinanten Multiplikationssatz

$$\det(A \circ B) = \det A \cdot \det B.$$

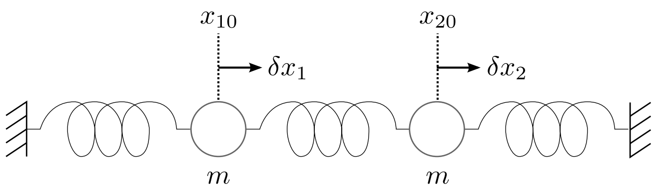
Hinweis: Konstruieren Sie eine Zerlegung von A in ein Produkt von Matrizen $S_i(\lambda)$, die die i-te Zeile mit $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ multipliziert und Matrizen Q_{ij}, die die j-te Zeile auf die i-te Zeile addiert. Zeigen Sie nun, dass der Multiplikationssatz für B und diese Matrizen gilt.

c) Zeigen Sie $\det A^{-1} = (\det A)^{-1}$.

[1] Aussagen, die Sie schon gezeigt haben, können Sie verwenden. Achten Sie jedoch darauf, dass Sie keine Kreisschlüsse produzieren.

Aufgabe 3: Normalschwingungen zweier Massenpunkte (15 Punkte)

Zwei Massenpunkte mit Masse m sind durch Federn miteinander und einer festen Wand verbunden (siehe Skizze rechts). Die Federn erfüllen das Hook'sche Gesetz mit der Federkonstanten k. Die Ruhelagen der Massenpunkte seien x_{i0} und die Auslenkungen aus dieser Ruhelage seien δx_i.



a) Geben Sie die Kräfte F_1 und F_2 die jeweils auf den Massenpunkt 1 und 2 wirken als Funktion von δx_1 und δx_2 an. Beachten Sie, dass die Kraft, die die mittlere Feder auf beide Massenpunkte ausübt, proportional zu ihrer gesamten Verkürzung ist. Bringen Sie das Ergebnis in die Form

$$\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \end{pmatrix},$$

wobei $M \in \mathbb{M}(2, 2, \mathbb{R})$ ist.

b) Die Bewegungsgleichung für die Massenpunkte ist gegeben durch

$$m \begin{pmatrix} \delta \ddot{x}_1 \\ \delta \ddot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \end{pmatrix}.$$

Machen Sie nun den Ansatz

$$\begin{pmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \end{pmatrix} = \sin \omega t \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \cos \omega t \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

Setzen Sie dies in die Bewegungsgleichung ein. Die Gleichung soll nun für alle t gelöst werden. Geben Sie die resultierenden Gleichungen für a_i und b_i an. Warum genügt es die Gleichung für a_i zu betrachten. Formulieren Sie die Gleichung als Eigenwertproblem.

c) Lösen Sie das Eigenwertproblem und geben Sie die Eigenwerte und die Eigenvektoren an.

d) Bestimmen Sie die möglichen Eigenfrequenzen ω und die dazugehörigen Amplituden $(a_1\ a_2)^T$. Diese Amplituden nennt man Eigenmoden. Skizzieren Sie die beiden Moden.

Aufgabe 4: Diagonalisierung einer Matrix (15 Punkte)

Bestimmen Sie Eigenwerte und die dazugehörigen Eigenvektoren zu

$$M = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 7 \\ 6 & 2 & -6 \\ -4 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$