

Blatt 6

Aufgabe 1: Kreuzprodukte

(15 Punkte)

a) Bestimmen Sie für

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T$$

$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T$$

$$\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}^T$$

Die Kreuzprodukte

$$\vec{v}_1 \times \vec{v}_2$$

$$\vec{v}_2 \times \vec{v}_3$$

$$\vec{v}_3 \times \vec{v}_1.$$

Untersuchen Sie das Ergebnis auf lineare Abhängigkeit.

b) Zeigen Sie, dass für das Levi-Cevita-Symbol die Beziehungen

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijk} = 6$$

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{lmn} = \delta_{il}\delta_{jm}\delta_{kn} + \delta_{im}\delta_{jn}\delta_{kl} + \delta_{in}\delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{im}\delta_{jl}\delta_{kn} - \delta_{il}\delta_{jn}\delta_{km} - \delta_{in}\delta_{jm}\delta_{kl}$$

gelten. Hier wurde die Einsteinsche Summenkonvention verwendet. Diese besagt, dass über doppelt vorkommende Indizes summiert wird.

c) Seien $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d} \in \mathbb{R}^3$. Benutzen Sie das Levi-Cevita Symbol und zeigen Sie bzw. berechnen Sie

$$\text{i) } \langle \vec{a} \times \vec{b} | \vec{c} \times \vec{d} \rangle = \langle \vec{a} | \vec{c} \rangle \langle \vec{b} | \vec{d} \rangle - \langle \vec{a} | \vec{d} \rangle \langle \vec{b} | \vec{c} \rangle$$

$$\text{ii) } (\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{c} \times \vec{d})$$

Aufgabe 2: Spatprodukt

(10 Punkte)

Drei linear unabhängige Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ seien gegeben.

a) Drücken Sie die Fläche des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms mit Hilfe der beiden Vektoren aus.

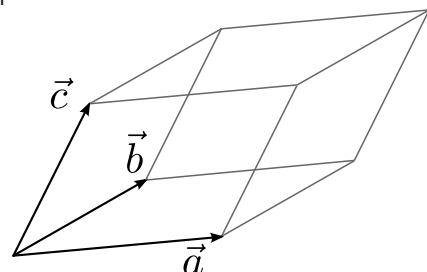
b) Geben Sie den normierten Normalvektor $\hat{n}$ auf die von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannte Ebene an. Geben Sie damit den Abstand des durch $\vec{c}$ definierten Punktes von dieser Ebene an.

c) Bestimmen Sie das Volumen des Parallelepipedes aus der Skizze. Man nennt den Ausdruck das Spatprodukt.

d) Zeigen Sie dass für das Spatprodukt

$$\langle \vec{a} | \vec{b} \times \vec{c} \rangle = \langle \vec{c} | \vec{a} \times \vec{b} \rangle = \langle \vec{b} | \vec{c} \times \vec{a} \rangle$$

gilt.



Aufgabe 3: Matrixmultiplikation

(15 Punkte)

Gegeben Seien $A, C \in \mathbb{M}(3 \times 3, \mathbb{R})$, $B \in \mathbb{M}(2 \times 3, \mathbb{R})$, $x \in \mathbb{M}(3 \times 1, \mathbb{R})$ und $y \in \mathbb{M}(1 \times 3, \mathbb{R})$ gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad y = (1 \quad 0 \quad 1)$$

Berechnen Sie

- a) $B \cdot A$
- b) $\alpha A + \beta C$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
- c) $A \cdot C$
- d) $x \cdot y$
- e) $y \cdot x$

Aufgabe 4: Drehmatrizen

(10 Punkte)

Drehungen in der Ebene lassen sich durch eine Matrix der Form

$$M_\varphi = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$$

beschreiben.

- a) Überzeugen Sie sich Anhand eines Beispiels davon, dass es sich um die Drehungen handelt. Wenden Sie dazu M_φ für mehrere φ auf einen beliebigen Vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ an und skizzieren Sie das Ergebnis.
- b) Zeigen Sie, dass die Menge aller Drehungen M_φ , $\varphi \in [0, 2\pi)$ zusammen mit der Matrixmultiplikation eine Gruppe bilden¹. Ist die Gruppe abelsch?

Aufgabe 5: Analytische Funktionen von Matrizen

(10 Zusatzpunkte)

Mit der Potenzreihe einer Funktion kann man die Wirkung der Funktion auf eine Matrix definieren. Sei eine Funktion $f(x) : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ analytisch, so dass die Potenzreihe

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n,$$

existiert. Man definiert dann für $M \in \mathbb{M}(N \times N, \mathbb{R})$

$$f(M) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n M^n,$$

wobei M^n das n -fache Matrixprodukt bezeichnet. Beachten Sie, dass $M^0 = \mathbb{1}_{N \times N}$

Schreiben Sie ein Programm, das

$$M_\theta = \exp(\theta R), \theta \in \mathbb{R} \quad R = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

berechnet, indem es die Entwicklung nach einer gewissen Ordnung abbricht. Untersuchen Sie, was die Abbildung macht indem Sie das Resultat für verschiedene θ auf einen beliebigen Vektor anwenden. Stellen Sie sicher, dass die Ordnung hoch genug gewählt ist. Was passiert wenn die Ordnung zu klein gewählt ist? Plotten Sie Ihre Ergebnisse.

¹Prüfen Sie dazu Abgeschlossenheit, Assoziativität, neutrales Element und inverses Element.