Blatt 5

Aufgabe 1: Funktionenräume (10 Punkte)

In der Quantenmechanik wird Ihnen häufig der Raum der quadratintegrabelen Funktionen begegnen. Diese sind für ein Interval $S \subset \mathbb{R}$ definiert als

$$L^2(S) \equiv \left\{ f : S \to \mathbb{R} \middle| \int_S |f(x)|^2 \, dx < \infty \right\}.$$

In der Quantenmechanik werden insbesondere die komplexwertigen Funktionen auf $\mathbb{R}^m$ wichtig sein. Es wird hier daher die komplexe Konjugation verwendet. Für dies Aufgabe können Sie sich jedoch auf reellwertige Funktionen beschränken.

a) Zeigen Sie, dass man ein Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf $L^2(S)$ durch

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f^*(x) g(x) \, dx,$$

definieren kann, wobei $f, g \in L^2(S)$ sind.

b) Es seien für $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ die Funktionen

$$f_0(x) = 1 \qquad f_n(x) = \cos(nx) \qquad g_n(x) = \sin(nx)$$

gegeben. Zeigen Sie, dass diese Funktionen auf dem Intervall $S = [-\pi, \pi]$ ein Orthogonalsystem bilden. Normieren Sie die Funktionen so, dass sie ein Ortho**normal**system bilden.

Aufgabe 2: Vektorraumbasis (10 Punkte)

Gegeben sei die Standardbasis $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \in \mathbb{R}^3$

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T \qquad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T \qquad \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T$$

und drei Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \in \mathbb{R}^3$ mit

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T \qquad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T \qquad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}^T.$$

a) Zeigen Sie, dass die Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \in \mathbb{R}^3$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden.

b) Gegeben seien nun die Vektoren

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 9 \end{pmatrix}^T \qquad \vec{q} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}^T.$$

Stellen Sie diese Vektoren sowohl in der Standardbasis $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ als auch in der Basis $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ dar.

Aufgabe 3: Skalarprodukt (10 Punkte)

Sei $\mathcal{B}_1 \equiv \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ eine Basis des Vektorraumes $V \subset \mathbb{R}^n$ für die $\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle \neq 0$ ist, wobei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Standardskalarprodukt ist. Die Koordinatendarstellung für einen Vektor $\vec{a} \in V$ bezüglich der Basis $\mathcal{B}_1$ ist definiert durch

$$\vec{a} = a_1 \vec{v}_1 + a_2 \vec{v}_2.$$

a) Zeigen Sie, dass in der Basisdarstellung zu $\mathcal{B}_1$ folgt

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle \neq \sum_i a_i b_i.$$

b) Seien nun $\vec{v}_1 = (1,0)^T$ und $\vec{v}_2 = (1,1)^T$. Finden Sie nun eine Basis $\mathcal{B}_2 = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2\}$, sodass

$$\forall \vec{a}, \vec{b} \in V : \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \sum_i \tilde{a}_i b_i,$$

wobei die Koordinatendarstellung bezüglich $\mathcal{B}_2$ definiert ist durch

$$\vec{a} = \tilde{a}_1 \vec{w}_1 + \tilde{a}_2 \vec{w}_2$$

Fertigen Sie eine Skizze an.

Hinweis: Fertigen Sie die Skizze zuerst an und überlegen Sie sich wie die Basis konstruiert werden muss.

c) Man nennt die Basis $\mathcal{B}_2$ die zu $\mathcal{B}_1$ duale Basis. Zeigen Sie, dass eine Orthonormalbasis zu sich selbst dual ist.

Aufgabe 4: Gram-Schmidtsches Orthogonalisierungsverfahren (20+10 Punkte)

Oft hat man eine Basis eines Vektorraumes, die nicht orthonormal ist. In Aufgabe 3 haben Sie gesehen, dass es erstrebenswert ist eine orthonormalbasis für einen Vektorraum zu haben. Eine Möglichkeit eine solche zu konstruieren ist das Gram-Schmidsche Orthogonalisierungsverfahren.

Seien $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m \in \mathbb{R}^n$ linear unabhängige Vektoren. Man erhält nun einen Satz orthogonaler Vektoren $\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_m$ durch

$$\vec{w}_1 = \vec{v}_1 \qquad \vec{w}_k = \vec{v}_k - \sum_{l=1}^{k-1} \frac{\langle \vec{v}_k, \vec{w}_l \rangle}{\langle \vec{w}_l, \vec{w}_l \rangle} \vec{w}_l \qquad k = 1, \ldots, m.$$

Aus dieser orthogonalen Basis erhält man eine orthonomale Basis indem man die Vektoren normiert.

a) Zeigen Sie, dass die konstruierten Vektoren $\vec{w}_l$ ein Orthogonalsystem bilden.

b) Benutzen Sie das Gram-Schmidtsche Orthogonalisierungsverfahren um aus der Basis

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T \qquad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T \qquad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}^T$$

eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$ zu konstruieren.

c) Benutzen Sie das Gram-Schmidtsche Orthogonalisierungsverfahren um die Funktionen

$$f_0 = 1 \qquad f_1 = x \qquad f_2 = x^2 \qquad f_3 = x^3$$

bezüglich des in Aufgabe 1 definierten Skalarproduktes mit $S = [-1, 1]$ zu orthogonalisieren.

d) (10 Zusatzpunkte) Schreiben Sie ein Programm, das das Gram-Schmidtsche Orthogonalisierungsverfahren im $\mathbb{R}^n$ implementiert.

   i) Testen Sie Ihr Programm mit den Vektoren aus Aufgabe b).

   ii) Auf der Homepage finden Sie eine Datei mit 5 Vektoren aus dem $\mathbb{R}^{10}$. Benutzen Sie Ihr Programm um eine Orthonormalbasis für den von diesen Vektoren aufgespannten Unterraum zu finden. Schreiben Sie diese in eine Datei. Verwenden Sie dazu das gleiche Format wie die Quelldatei. Schicken Sie die Datei bis zur Abgabe an b.probst@tu-bs.de.