Blatt 4

Aufgabe 1: Uneigentliche Integrale (20 Punkte)

a) Betrachten Sie die Funktion

$$f(x) = \frac{x}{(1-x^2)^{\frac{1}{4}}}.$$

Geben Sie den Definitionsbereich an. Wo sind die Pole der Funktion? Berechnen Sie

$$I = \int_0^1 f(x)\, dx.$$

b) Quadratische Ergänzung

i) Benutzen Sie quadratische Ergänzung um

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2+2x+5}\, dx$$

zu berechnen.

ii) Berechnen Sie auf die gleiche Weise

$$\int \frac{1}{ax^2+bx+c}\, dx$$

für $a, b, c \in \mathbb{R}$ und $b^2 - 4ac < 0$.

iii) Die Cauchy–Verteilung ist gegeben durch

$$g(x) = \alpha \, \frac{1}{\gamma^2 + (x-\lambda)^2},$$

wobei $\gamma, \lambda \in \mathbb{R}$ sind. Bestimmen Sie α, so dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, dx = 1.$$

c) Befindet sich ein Pol im Integrationsgebiet ist das Integral nicht mehr gut definiert. Befindet sich der Pol auf dem Rand des Integrationsgebietes kann man eine kleine ϵ-Umgebung um den Rand ausschneiden und hoffen, dass das Integral für $\epsilon \to \infty$ konvergiert. Man kann diese Prozedur nun verallgemeinern und auf Pole im Integrationsgebiet anwenden. Dazu definiert man den Hauptwert eines Integrals als

$$\mathrm{P}\int f(x) = \lim_{\epsilon \to 0^+} \left\{ \int^{x_0-\epsilon} f(x)\, dx + \int_{x_0+\epsilon} f(x)\, dx \right\},$$

wobei $f(x)$ einen Pol bei x_0 hat. Man schneidet also eine kleine Umgebung aus dem Integrationsgebiet und macht diese beliebig klein[1].

Benutzen Sie dies Technik um das Integral

$$\int_{-3}^{3} \frac{x}{x^2-1}\, dx$$

zu berechnen.

[1]Genauere Details findet man in den meisten Büchern zum Thema mathematische Methoden bzw. mathematical methods z.B. Arfken, Webber & Harris *Mathematical Methods for Physicists*, Stone & Goldbart *Mathematics for Physics* oder Lang & Pucker *Mathematische Methoden in der Physik*

Aufgabe 2: Lineare Algebra (20 Punkte)

a) Konstruieren Sie einen Vektorraum mit 8 Elementen. Finden Sie eine grafische Darstellung für diese Elemente.
Hinweis: In den Präsenzübungen haben Sie Objekte mit einer endlichen Anzahl von Komponenten kennen gelernt.

b) Zeigen Sie, dass die Lösungen der Differentialgleichung

$$c^2 \frac{d^2}{dx^2} \psi(x) = -\omega^2 \psi(x),$$

mit $\omega, c > 0$ einen Vektorraum bilden.

c) Prüfen Sie welche diese Mengen mit den üblichen Rechenregeln aus $\mathbb{R}^n$ Vektorräume sind

- $\mathcal{M}_1 \equiv \{(x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3 | x_1 = x_2 = 2x_3\}$
- $\mathcal{M}_2 \equiv \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \middle| \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} : x = \begin{pmatrix} \mu + \lambda \\ \mu^2 \end{pmatrix} \right\}$

Aufgabe 3: Uneigentliche Integrale — Numerisch (10 Punkte)

Oft ist man an einem speziellen Grenzwert interessiert wie zum Beispiel Stützstellenabstand $h = 0$ oder dem Integral von $-\infty$ bis ∞. Diese sind numerisch oft nicht direkt berechenbar. Man kann dann den Wert z.B. für immer kleinere h berechnen und dann nach $h = 0$ extrapolieren.

Benutzen Sie die Integrationsroutine von Blatt 2 und um für die J_n von Blatt 3

$$I_n(D) = \int_0^D J_n(x)$$

für verschiedene D zu berechnen. Plotten Sie das Ergebnis über $1/D$. Was erhält man für $D \to \infty$. Zeigen Sie dies für J_0 bis J_3.