Blatt 2

Aufgabe 1: Konvergenzradien (10 Punkte)

Geben Sie die Konvergezradien folgender Reihen an

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} x^n$

b) $\sum_{n=0}^{\infty} n! x^n$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(2 - \frac{1}{n}\right)^n \left(\frac{x+1}{3}\right)^n$

d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(nx)^n}{n!}$

Aufgabe 2: Taylorentwicklung (20 Punkte)

a) Bestimmen Sie die Taylorentwicklung von

- $\sin(x)$
- $\cos(x)$
- $\exp(ix)$

um $x_0 = 0$. Vergleichen Sie die Entwicklungen und stellen Sie einen Zusammenhang her.

b) Bestimmen Sie mit vollständiger Induktion die Ableitungen von

- $\ln(1+x)$ und entwickeln Sie die Funktion um $x_0 = 0$
- $x \sin(x)$ und entwickeln Sie die Funktion um $x_0 = \pi/2$

Hinweis:Zeigen Sie, dass

$$\frac{\partial^n}{\partial x^n} x \sin(x) = x \frac{\partial^n}{\partial x^n} \sin(x) - n \frac{\partial^n}{\partial x^n} \cos(x).$$

c) Bestimmen Sie die Taylorentwicklung von

$$f(x) = \frac{5 - 2x}{x^2 + x - 2}$$

um $x = 0$. Führen Sie dazu eine Partialbruchzerlegung durch und verwenden Sie $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ für $|x| < 1$. *Beipiel zur Partialbruchzerlegung siehe Ende des Übungsblattes.*

Aufgabe 3: Riemann Integral (20 Punkte)

Betrachten Sie die Funktion

$$g(x) = (x-2)^3 - x^2 + 10.$$

a) Berechnen Sie

$$I = \int_0^4 g(x)\, dx$$

b) Approximieren Sie das Integral mit einer Riemannsumme, indem Sie das Integrationsinterval in vier gleich große Abschnitte zerlegen. Wie groß ist $|I - I_{\text{Riemann}}|$, wobei I_{Riemann} das Ergebnis der Riemannsumme ist?

c) In wieviele gleich große Teilabschnitte müssen Sie das Interval zerlegen damit $|I - I_{\text{Riemann}}| < 10^{-2}$ ist? Hier bietet sich die Benutzung eines Computers an

d) Wenn man ein Problem numerisch behandelt, liegen oft nur Funktionswerte auf einem Gitter x_i vor. Wenn man eine Ableitung benötigt, muss man diese mit den Werten $f(x_i)$ abschätzen einer allgemeinen Funktion f. Gehen Sie von geichmäßig verteilten Stüzstellen $x_n = x_0 + n\Delta x$ aus.

- Entwickeln f um x_0 und bestimmen Sie Ableitung $f'(x_0)$ mit Hilfe von $f(x_0)$ und $f(x_1)$. Welche Ordnung hat der Fehler? Benutzen Sie $f(x_2)$ um $f'(x_0)$ bis in 2. Ordnung zu bestimmen.
- Entwickeln Sie f um x_1 und bestimmen Sie $f'(x_1)$ mit Hilfe von $f(x_0)$ und $f(x_2)$. Welche Ordnung hat der Fehler?
- Bestimmen Sie $f''(x_0)$.

e) Benutzen Sie die Entwicklung aus der letzten Teilaufgabe um anhand der Stützstelllen eine Taylorentwicklung von f anzugeben. Benutzen Sie diese um die Trapezregel

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2}\Big(f(a)+f(b)\Big)$$

und die Simpsonregel

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6}\left(f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right)$$

herzuleiten.

f) Da diese Regeln nur für kleines $b-a$, gelten zerlegt man das Integrationsgebiet in N Teilintervalle und integriert auf jedem Teilinterval mit einer der obigen Regel. Zeigen Sie zunächst

$$\int_0^b f(x)\,dx = \sum_{n=0}^{N-1}\int_{n\Delta x}^{(n+1)\Delta x}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{(x-n\Delta x)^k}{k!}\frac{\partial^k f}{\partial x^k}\bigg|_{x=n\Delta x}\right)dx,$$

wobei $b = N\Delta x$ ist.

g) Brechen Sie die Entwicklung nach der führenden Ordnung ab und zeigen Sie, dass man die Riemannsumme erhält.

h) Benutzen Sie die Trapezregel und die Simpsonregel, um die summierte Trapezregel

$$I \approx \frac{\Delta x}{2}\Big(f(0)+2f(2\Delta x)+2f(3\Delta x)+\cdots+2f((N-1)\Delta x)+f(b)\Big)$$

und die summierte Simpsonregel

$$I \approx \frac{\Delta x}{3}\Big(f(0)+4f(\Delta x)+2f(2\Delta x)+4f(3\Delta x)+\cdots+4f((N-1)\Delta x)+f(b)\Big)$$

herzuleiten. Beachten Sie, dass die Intervalle bei der Simpsonregel doppelt so groß gewählt werden müssen (Warum?).

i) Wiederholen Sie nun die Analyse aus Aufgabe c) mit der Trapezregel und der Simpsonregel.

Beispiel zur Partialbruchzerlegung

Bei einer Partialbruchzerlegung will man eine gebrochenrationale Funktion, deren Zählergrad kleiner als der Nennergrad ist in eine Summe von Termen der Form $a/(x-b)^j$ zerlegen. Dies wird hier an einem einfachen Beispiel vorgeführt.

Man betrachtet

$$\frac{x}{x^2+5x+6} = \frac{x}{(x+2)(x+3)}.$$

Die Partialbruchzerlegung hat nun die Form

$$\begin{aligned} \frac{x}{(x+2)(x+3)} &= \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+3} \\ &= \frac{A(x+3)+B(x+2)}{(x+2)(x+3)} \end{aligned}$$

Man bekommt also als Bestimmungsgleichung

$$x = A(x+3) + B(x+2),$$

die durch

$$\begin{aligned} A &= -2 \\ B &= 3 \end{aligned}$$

für alle x gelöst wird. Die Partialbruchzerlegung ist folglich

$$\frac{x}{(x+2)(x+3)} = \frac{3}{x+2} - \frac{2}{x+3}.$$