- Abgabe in Zweiergruppen ist erlaubt. Die Gruppen müssen aber immer die gleichen sein.
- Voraussetzungen für die Studienleitung sind:
  - Die Hälfte der Punkte aus den Übungszetteln
  - Bestehen der Klausur

Blatt 1

Aufgabe 1: Umkehrfunktionen (15 Punkte)

a) Sei $f(x) = \ln \frac{1+x}{x}$.
   - Bestimmen Sie den Definitions- und den Wertebereich für $f(x)$
   - Bestimmen Sie die Umkehrfunktion $f^{-1}(x)$. Geben Sie deren Definitions- und Wertebereich an.
   - Geben Sie den Definitionsbereich von $f^{-1} \circ f(x)$ und $f \circ f^{-1}(x)$ an.
   - Skizzieren Sie $f(x)$ und $f^{-1}(x)$.

b) Sei $g(x) = \frac{x}{1+|x|}$.
   - Geben Sie den Definitions- und Wertebereich für $g(x)$ an.
   - Bestimmen Sie die Umkehrfunktion $g^{-1}(x)$.

Aufgabe 2: Folgen, Reihen, Konvergenz und Vollständigkeit (15 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass die durch
$$S_m = \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n^2}$$
definierte Folge das Cauchy Kriterium erfüllt und folglich konvergiert.

b) Zeigen Sie, dass die durch
$$S_m = \sum_{n=1}^{m} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$
definierte Folge das Cauchy Kriterium erfüllt und geben Sie den Grenzwert an.
Hinweis: Sie können vorraussetzen, dass die Taylorentwicklung von $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}x^n/n$ im offenen Intervall $(-1, 1)$ konvergiert. Der Abelsche Grenzwertsatz besagt, dass, wenn die Entwicklung auch auf dem Rand konvergiert, sie auch gegen die Funktion konvergiert.

c) Betrachten Sie für $x_0 > 0$, $a \in \mathbb{R}$ und $a > 0$ die Folge
$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right).$$
   - Bestimmen Sie den Fixpunkt $\tilde{x}$ für den $x_{n+1} = x_n$ ist.
   - Das Monotonieprinzip besagt, dass eine monotone, beschränkte Folge auf einem vollständigen Körper konvergiert. Benutzen Sie dieses Prinzip um die Konvergenz der Folge zu zeigen.
     Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass für beliebiges $x_0 > 0$ folgt, dass $x_n \geqslant \sqrt{a}$ ist.

d) Bestimmen Sie für alle Folgen jeweils die ersten 30 Folgenglieder. Verwenden Sie bei der Folge aus Teilaufgabe c) $x_0 = 0.1$ und $a = 2$. Die Verwendung eines Computers ist ausdrücklich erwünscht.

Aufgabe 3: Der Körper der komplexen Zahlen (20 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}^2$ mit

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 b_1 - a_2 b_2 \\ a_1 b_2 + a_2 b_1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{a_1^2 + a_2^2} \begin{pmatrix} a_1 \\ -a_2 \end{pmatrix}$$

einen Körper bildet.

b) Man definiert nun die komplexe Einheit i mit der Eigenschaft $i^2 = -1$. Zeigen Sie dass man mit der Zuordnung

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \mapsto a_1 + i a_2$$

die gleichen Rechenregeln bekommt und damit auch wieder einen Körper erhält.

c) Die komplexe Konjugation einer komplexen Zahl $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ ist definiert als

$$\bar{z} = x - iy.$$

Der Betrag einer Komplexen Zahl ist definiert als $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$. Zeigen Sie für $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}$

$$\overline{(z_1 + z_2)} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2 \qquad \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2 \qquad \overline{z_1^n} = \bar{z}_1^n$$

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1||z_2| \qquad |z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2| \qquad |z_1 - z_2| \geqslant ||z_1| - |z_2||.$$

d) Geben Sie die Zahlen

$$\frac{i-1}{i+1} \qquad \frac{3+4i}{1-2i} \qquad \frac{(1+i)^4}{(1-i)^3} + \frac{(1-i)^4}{(1+i)^4} \qquad \frac{1+ia}{1-ia}, \ a \in \mathbb{R}$$

in der Form $x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ an und bestimmen Sie deren Betrag.