INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

Prof. Dr. W. Brenig
Dipl.-Phys. S. Grossjohann

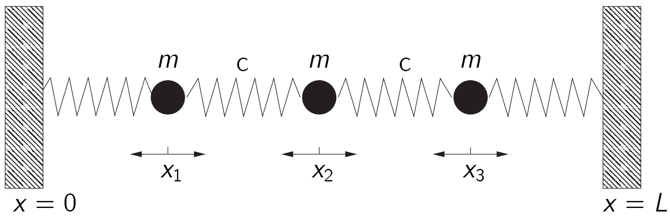
Rechenmethoden II — SoSe 2008

12. Übungsblatt — Abgabe: **Montag den 07.07.2008 bis 17:00h, HA-Kiste bei A316**

Termine und Übungszettel (pdf-Format) sind im Internet unter http://www.fkt.tu-bs.de zu finden.

1. **Harmonischer Oszillator II (6 Punkte)**
Betrachten Sie erneut den durch eine äussere Kraft $f(t)$ angetriebenen, ungedämpften harmonischen Oszillator:
$$\ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = f(t). \tag{1}$$
Die Anfangsbedingungen seien $x(0) = x_0$ und $\dot{x}(0) = v$.
   (a) Überführen Sie die DGL in ein System von DGLn erster Ordnung der Form $\dot{\vec{x}}(t) = A\vec{x}(t) + \vec{b}(t)$.
   (b) Bestimmen Sie die Lösung der homogenen DGL durch Lösen des Eigenwertproblems mit dem Ansatz $\vec{x}(t) = \vec{c}e^{\lambda t}$, $\vec{c} = \text{const}$ in der Form
$$\vec{c}_h(t) = a\vec{c}_1 e^{\lambda_1 t} + b\vec{c}_2 e^{\lambda_2 t}, \quad a, b = \text{const}.$$
   (c) Zeigen Sie für eine beliebige Funktion $f(t)$, dass man mit dem Ansatz *Variantion der Konstanten*
$$\vec{x}_p(t) = a(t)\vec{c}_1 e^{\lambda_1 t} + b(t)\vec{c}_2 e^{\lambda_2 t}$$
eine partikuläre Lösung $\vec{x}_p(t)$ finden kann. Geben Sie dann die allgemeine Lösung der Gleichung (1) für $f(t) = \sin\omega t$ an.

2. **Ein kleiner Festkörper (8 Punkte)**
Gegeben sei ein Modell eines Festkörpers der Länge L, in dem 3 Atome der Masse m durch eine Feder der Federkonstante c untereinander und mit der Wand bei $x = 0$ und $x = L$ verbunden sind (siehe Skizze). Die Auslenkungen der Atome aus der Gleichgewichtslage seien mit x_j bezeichnet. Die Bewegungsgleichungen für das System lauten damit:
$$\begin{aligned} -m\ddot{x}_1 &= cx_1 + c(x_1 - x_2) \\ -m\ddot{x}_2 &= c(x_2 - x_1) + c(x_2 - x_3) \\ -m\ddot{x}_3 &= c(x_3 - x_2) + cx_3. \end{aligned}$$



   (a) Führen Sie das Differentialgleichungssystem mit Hilfe des Schwingungsansatzes $x_j = x_{j,0}e^{i\alpha t}$ in ein Eigenwertproblem über. Dabei ist $x_{j,0}$ die Anfangsauslenkung des Atoms j.
   (b) Bestimmen Sie die Eigenwerte $\lambda = \alpha^2$ und die dazu gehörigen Eigenvektoren.
   (c) Interpretieren Sie die Eigenschwingungsmoden graphisch und in Worten.

3. **...von Katzen und Mäusen (6 Punkte)**
Wir betrachten die zwei gekoppelten DGLn
$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + By \\ \dot{y} &= Cx + Dy \end{aligned}$$
Ein solches System beschreibt die Wechelwirkung zweier Populationen (beispielsweise von Bakterien/Tierarten), je nach Wahl von A, B, C und D. Dabei ist A,D offensichtlich die Geburten-/Sterberate und B, C die Wechselwirkung der Populationen.
   (a) Wählen Sie die richtigen Vorzeichen der Konstanten für eine sich vermehrende Katzen- $\rightarrow x(t)$ und Mäusebevölkerung $\rightarrow y(t)$. Berücksichtgen Sie dabei die Wechselwirkung in Form von *fressen und gefressen werden.*
   (b) Lösen Sie das System der gekoppelten DGLn und beschreiben Sie das Verhalten der Populationen.
   (c) Stellen Sie die Katzen und die Mäusepopulation grafisch dar für den Fall gleicher Geburtenrate von Katzen und Mäusen.