



Termine und Übungszettel (pdf-Format) sind im Internet unter <http://www.fkt.tu-bs.de> zu finden.

1. Freier Fall (12 Punkte)

Der freie Fall eines Körpers im Schwerfeld der Erde wird beschrieben durch die Differentialgleichung (DGL)

$$m\ddot{z}(t) = mg$$

wobei m die Masse des Körpers und g die Fallbeschleunigung in z -Richtung ist.

- (a) Berechnen Sie $z(t)$. Es gelten die Randbedingungen $\dot{z}(0) = 0$ und $z(0) = h$.
- (b) Berechnen Sie $z(t)$ für den Fall eines Körpers mit Stokesscher Reibung und den Randbedingungen aus (a). Der Fall Stokesscher Reibung ist anwendbar auf niedrige Geschwindigkeiten, bei denen die Reibungskraft proportional zur Geschwindigkeit wächst. Die DGL lautet dann

$$m\ddot{z}(t) = mg - \alpha\dot{z}(t).$$

Bestimmen Sie auch die Grenzgeschwindigkeit, d.h. die Geschwindigkeit bei der Masse nicht mehr schneller wird durch die ihr entgegen gerichtete Reibungskraft.

- (c) Im Fall hoher Geschwindigkeiten wächst die Reibung proportional zum Geschwindigkeitsquadrat (Newtonsche Reibung). Die DGL für $z(t)$ hat dann die Form

$$m\ddot{z}(t) = mg - \beta\dot{z}(t)^2.$$

- Bringen Sie die DGL mit Substitution $v(t) = \dot{z}(t)$ auf die Form einer Riccati-DGL

$$\dot{v}(t) = a(t) + b(t)v(t) + c(t)v(t)^2.$$

- Finden Sie eine partikuläre Lösung $v_p(t)$ (denken Sie zum Beispiel an die Grenzgeschwindigkeit).
- Substituieren Sie $v(t) = v_p(t) + u(t)$. Mit diesem Trick bringt man die Riccati-DGL auf die Form einer Bernoulli-DGL:

$$\dot{u}(t) = \nu(t)u(t) + \mu(t)u(t)^\alpha.$$

- Aus der Bernoulli-DGL erhält man schliesslich eine einfache lineare DGL erster Ordnung durch geschicktes Erweitern mit $(1 - \alpha)u(t)^{-\alpha}$ und anschliessender Substitution von $x(t) = u(t)^{1-\alpha}$. Finden Sie die Lösung für $x(t)$ und Substituieren Sie $x(t) \rightarrow u(t) \rightarrow v(t)$ zurück.
- (d) In Aufgabenteil (c) sehen Sie die aufwendige Lösung einer relativ einfachen DGL anhand einer schematischen Vorgehensweise. Mit etwas Geschick hätte man sie aber auch mit Trennung der Veränderlichen, Partialbruchzerlegung und Integration lösen können. Zeigen Sie dies!

2. Harmonischer Oszillator (8 Punkte)

Betrachten Sie den angetriebenen, ungedämpften, harmonischen Oszillator

$$\ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = f(t).$$

- (a) Bestimmen Sie $x(t)$ für freie Schwingungen, d.h. $f(t) = 0$.
- (b) Berechnen Sie $x(t)$ nun für den Fall erzwungener Schwingungen mit $f(t) = \cos \omega t$. Verwenden Sie zum Finden einer partikulären Lösung den Ansatz $x(t) = A \cos \omega t$ mit $A \in \mathbb{R}$.
- (c) Skizzieren Sie die Amplitude A als Funktion von ω und erklären Sie den Verlauf. Wie nennt man den Punkt $\omega = \omega_0$?
- (d) Überführen Sie das System in ein System von DGLn erster Ordnung der Form $\dot{\vec{x}}(t) = A\vec{x}(t) + \vec{b}(t)$.