INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

Prof. Dr. W. Brenig
Dipl.-Phys. S. Grossjohann

Rechenmethoden II — SoSe 2008

10. Übungsblatt — Abgabe: **Montag den 23.06.2008 bis 17:00h, HA-Kiste bei A316**

Termine und Übungszettel (pdf-Format) sind im Internet unter http://www.fkt.tu-bs.de zu finden.

1. **Fourier-Transformation (6 Punkte)**
Die Fourier-Transformation ist eine spezielle Form der Integraltransformation

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)K(t,\omega)dt$$

mit Kern $K(t,\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{i\omega t}$:

$$F(\omega) = FT(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt, \qquad f(t) = FT^{-1}(F) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t}d\omega.$$

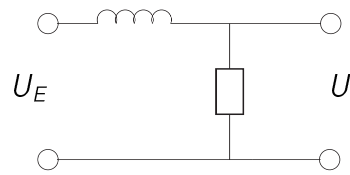
(a) Wenden Sie die Fourier-Transformation auf $f(t) = \sin\omega_0 t$ an. Zeigen Sie, dass die Rücktransformation FT^{-1} von FT(f) wieder zurück auf f(t) führt. Bei der Rechnung wird Ihnen eine Darstellung der Delta-Distribution begegnen:

$$\delta(x - x_0) = \lim_{a\to\infty} \frac{\sin a(x - x_0)}{\pi(x - x_0)}.$$

2. **Tiefpass-Filter (8 Punkte)**
In der nachfolgenden Abbildung ist der typische Aufbau eines Tiefpass-Filters skizziert.

(a) Bestimmen Sie die Differentialgleichung der Ausgangsspannung $U_A(t)$ für eine angelegte Eingangsspannung $U_E(t)$ ohne Belastung von $U_A(t)$.

(b) Lösen Sie die DGL für den Fall, dass die Eingangsspannung $U_E(t)$ zur Zeit $t = 0$ sprunghaft eingeschaltet. Verwenden Sie dazu die Laplace-Transformation $\mathcal{L}$, d.h. wenden Sie die Laplace-Transformation auf die DGL an, lösen Sie die erhaltene Gleichung nach $\mathcal{L}(U_a(t))$ auf und bestimmen Sie die Lösung durch Laplace-Rücktransformation $\mathcal{L}^{-1}(U_A(s))$.



3. **Fourier-Transformation, Faltungstheorem (6 Punkte)**

(a) Experimentell gemessene Daten $f_{\text{Exp}}(x)$ sind häufig verbreitert/verfälscht durch die Auflösung $g_{\text{Mess}}(x)$ der verwendeten Messinstrumente. $f_{\text{Exp}}(x)$ ergibt sich als Faltung der realen Messdaten $f_{\text{Real}}(x)$ mit der Auflösung der Apparatur $g_{\text{Mess}}(x)$:

$$f_{\text{Exp}}(x) = (f_{\text{Real}} * g_{\text{Mess}})(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\text{Real}}(y)g_{\text{Mess}}(x-y)dy.$$

Erklären Sie, wie Sie mithilfe der gemessenen Daten $f_{\text{Exp}}(x)$, Kenntnis der Auflösung $g_{\text{Mess}}(x)$ unter Verwendung von Fourier-Transformation und Faltungstheorem auf die tatsächlichen Daten $f_{\text{Real}}(x)$ rückschließen können.

(b) Wie wirkt sich ein Tiefpassfilter auf ein Signal aus, welches mit einer hochfrequenten Störung überlagert ist? Berechnen Sie $f_{\text{Exp}}(\omega) = (f_{\text{Signal}} * g_{\text{Filter}})(\omega)$ mit

$$f_{\text{Signal}}(\omega) = \cos(\omega) + \frac{1}{2}\cos 2\omega$$

und einer Filterfunktion

$$g_{\text{Filter}}(\omega) = \left\{ \begin{array}{cc} (1 - |\omega|/a), & |\omega| \leq a \\ 0 & \text{sonst} \end{array} \right\}.$$

Plotten Sie f_{Signal}, die Filterfunktion g_{Filter} und das Ergebnis der Faltung f_{Exp} für $a = 100$ und $a = 10$. Erklären Sie die Resultate der Faltung mit Worten.