INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

Prof. Dr. W. Brenig
Dipl.-Phys. S. Grossjohann

Rechenmethoden II | SoSe 2008

9. Übungsblatt | Abgabe: **Montag den 16.06.2008 bis 17:00h, HA-Kiste bei A316**

Termine und Übungszettel (pdf-Format) sind im Internet unter http://www.fkt.tu-bs.de zu finden.

1. **Legendre-Polynome (6 Punkte)**
Zeigen Sie, dass die Legendre-Polynome $P_n(x)$ ein orthogonales Funktionensystem auf dem Intervall $[-1, 1]$ bilden, d.h. dass gilt:
$$(P_n, P_m) = \int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)dx = \frac{2}{2n+1}\delta_{nm}.$$
Verwenden Sie zur Lösung partielle Integration und die Darstellung der Legendre-Polynome durch die Formel von Rodriguez
$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n.$$
Außerdem darf die Lösung des Integrals
$$\int_{-1}^{1}(x^2-1)^n dx = (-1)^n \frac{2^{2n+1}n!^2}{(2n+1)!}$$
verwendet werden.

2. **Cauchy-Schwarzsche Ungleichung (6 Punkte)**
Im Raum $\mathbb{L}^2$ der quadratintegrablen Funktionen (z.B. Wellenfunktionen der Quantenmechanik) ist das Skalarprodukt definiert durch
$$\langle f, g\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(x)}g(x)dx.$$
Für das Skalaprodukt gilt die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung
$$|\langle f, g\rangle|^2 \leq \langle f, f\rangle \langle g, g\rangle .$$
Rechnen Sie dies anhand des Beispiels $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ und $g(x) = xe^{-x^2}$ nach. Bei der Lösung eines der Integrale hilft Ihnen eventuell die sogenannte Gamma-Funktion $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$. Mit der Rekursionsformel $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ und den Werten $\Gamma(1) = 1$ und $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ sollte es Ihnen nun möglich sein, eine ganze Menge bestimmer Integrale zu lösen.

3. **Fourier-Entwicklung (8 +2 Punkte)**
Funktionen $f(x)$, die in den Grenzen $[a, b]$ periodisch sind, können mithilfe einer Fourier-Reihe als Summe trigonometrischer Funktionen dargestellt werden (Fourierentwicklung):
$$FR(f) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)$$
Dabei ist $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{b-a}$ die Kreisfrequenz mit der Periode $T = b - a$. Die Koeffizienten a_n $(n \geq 0)$ und b_n $(n > 0)$ erhält man durch
$$a_n = \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\cos\left(\frac{2n\pi x}{b-a}\right)dx, \qquad b_n = \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\sin\left(\frac{2n\pi x}{b-a}\right)dx$$

   (a) Formen Sie die Fourierreihe in ihre komplexe Darstellung mit Koeffizienten c_n um. Geben Sie dazu auch die c_n als Funktion von a_n, b_n an.

   (b) Bestimmen Sie die Fourierentwicklung der 2π-periodisch fortgesetzten Funktion
$$f(x) = x^2 \quad \text{für} \quad x \in (-\pi, \pi).$$

   (c) Plotten Sie Fourierentwicklung mit n=4, 8 und 64 Summanden mit einem geeignetem Programmpaket Ihrer Wahl. (**optional, 2 Zusatzpunkte**)