INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

Prof. Dr. W. Brenig
Dipl.-Phys. S. Grossjohann

Rechenmethoden II SoSe 2008

6. Übungsblatt Abgabe: **Montag den 28.05.2008 bis 17:00h, HA-Kiste bei A316**

Termine und Übungszettel (pdf-Format) sind im Internet unter http://www.fkt.tu-bs.de zu finden.

1. **div, rot & grad (5 Punkte)**
   Sei Ψ ein skalares Feld, $\bar{A}$ und $\bar{B}$ seien Vektorfelder. Zeigen Sie:

   (a) $\mathrm{div}(\Psi\bar{A}) = \Psi\mathrm{div}\bar{A} + \bar{A}\cdot\mathrm{grad}\Psi$

   (b) $\mathrm{rot}(\Psi\bar{A}) = \Psi\mathrm{rot}\bar{A} - \bar{A}\times\mathrm{grad}\Psi$

   (c) $\mathrm{div}(\bar{A}\times\bar{B}) = \bar{B}\cdot\mathrm{rot}\bar{A} - \bar{A}\cdot\mathrm{rot}\bar{B}$

2. **Divergenz in Polarkoordinaten (7 Punkte)**
   Sie kennen die verschiedenen Differentialoperatoren div, rot und grad bereits aus der Vorlesung für das kartesische Koordinatensystem. Wir führen nun anstelle der kartesischen Koordinaten Polarkoordinaten ein, d.h.:

$$\bar{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rightarrow \bar{r} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ z \end{pmatrix}.$$

   (a) Geben Sie die normierten Basisvektoren ($\bar{e}_r$, $\bar{e}_\varphi$, $\bar{e}_z$) des neuen Koordinatensystems an und zeigen Sie, dass diese ebenso ein Orthonormalsystem bilden.

   (b) Stellen Sie **div** in Polarkoordinaten dar.

3. **Gaußscher Integralsatz (8 Punkte)**
   Gegeben sei das Vektorfeld $\bar{A} = Qr^{-3}\bar{r}$ mit $\bar{r} = (x, y, z)$, $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

   (a) Berechnen Sie $\mathrm{div}\bar{A}$.

   (b) Berechnen Sie das Volumenintegral

$$I_1 = \iiint \mathrm{div}\bar{A}\,dV$$

   über eine Kugel mit dem Radius R um den Koordinatenursprung. Verwenden Sie Kugelkoordinaten $x = r\sin\vartheta\cos\varphi$, $y = r\sin\vartheta\sin\varphi$ und $z = r\cos\vartheta$.

   (c) Berechnen Sie den Fluss I_2 von $\bar{A}$ durch die Oberfläche dieser Kugel:

$$I_2 = \iint \bar{A}\cdot d\bar{f}.$$

   Dabei ist $d\bar{f} = R^2(\bar{r}/r)\sin\vartheta\,d\vartheta\,d\varphi$.

   (d) Nennen Sie zwei Beispiele aus der Physik für Vektorfelder dieser Art!