

Termine und Übungszettel (pdf-Format) sind im Internet unter <http://www.fkt.tu-bs.de> zu finden.

1. Reihen (7 Punkte)

Zeigen Sie, dass

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + a^2} = \frac{\pi}{a \sinh(a\pi)}$$

gilt. Dazu gehen Sie wie folgt vor:

- Rechnen Sie kurz nach, dass die Funktion $n_f(z) = \pi \csc(\pi z)$ Pole genau bei $z = n$ hat.
- Bestimmen Sie alle Residuen von $f(z)n_f(z)$ mit $f(z) = \frac{1}{z^2 + a^2}$.
- Ist es Ihnen nun möglich, den Residuensatz "rückwärts" anzuwenden, d.h. die Reihe $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + a^2}$ als eine Summe über Residuen aufzufassen und daraus ein Kontur-Integral über ganz $\mathbb{C}$ zu machen?
- Zeigen Sie, dass das Integral über die Kontour verschwindet wenn die Konturgrenzen ins Unendliche geschoben werden. Folgende Gleichung

$$\csc(z) = \frac{1}{z} - 2z \left(\frac{1}{z^2 - \pi^2} - \frac{1}{z^2 - 4\pi^2} + \frac{1}{z^2 - 9\pi^2} - \dots \right)$$

darf verwendet werden.

2. Mittag-Lefflerscher Entwicklungssatzes (7 Punkte)

Beweisen Sie den Mittag-Lefflerschen Entwicklungssatz: Gegeben sei eine Funktion $f(z)$ mit einfachen Polen bei $z = a_1, a_2, \dots$ sowie dazugehörigen Residuen $b_1, b_2, \dots$. Weiterhin seien C_N Kreise vom Radius R_N , die nicht durch einen Pol verlaufen und auf denen $|f(z)| < M$ mit M unabhängig von N , sowie $R_N \rightarrow \infty$ für $N \rightarrow \infty$. Dann besagt der Entwicklungssatz von Mittag-Leffler, dass

$$f(\eta) = f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \left\{ \frac{1}{\eta - a_n} + \frac{1}{a_n} \right\}.$$

Vorgehensweise:

- Bestimmen Sie die Residuen der Funktion $\frac{f(z)}{z - \eta}$.
- Wenden Sie den Residuensatz "rückwärts" auf $\frac{f(z)}{z - \eta}$ an.
- Beschaffen Sie sich eine weitere Gleichung durch $\eta = 0$.
- Subtrahieren der beiden Gleichungen führt direkt zum Mittag-Lefflerschen Entwicklungssatz nach Grenzwertbildung des Kontur-Integrals über C_N für $R \rightarrow \infty$.

3. Partialbruchzerlegung des Kosekans (6 Punkte)

Zeigen Sie, dass

$$\csc z = \frac{1}{z} + \sum_n (-1)^n \left(\frac{1}{z - n\pi} + \frac{1}{n\pi} \right), \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots$$

gilt. Betrachten Sie dazu die Funktion $f(z) = \csc(z) - \frac{1}{z}$ und wenden Sie den Mittag-Lefflerschen Entwicklungssatz an. Dazu ist es nötig, dass $f(z)$ auf dem Kreis C_N beschränkt ist und keiner der Pole auf dem Rand des Kreises liegt.

- Wählen Sie den Radius R_N des Kreises C_N so, dass die Pole von $f(z)$ auf der reellen Achse nicht getroffen werden.
- Zeigen Sie anschliessend die Beschränktheit von $f(z)$ für $\text{Im}(z) \neq 0$.
- Bringen Sie Ihr Ergebnis schliesslich in die Form aus Aufgabe 1 (d).

Achtung: Aufgabe ist es, obige Beziehung zu zeigen, nicht (a) und (b) zu bearbeiten und dann den Stift aus der Hand legen. Vermeintliche Teilaufgaben sind lediglich Lösungshilfen.