



**Der Klausurtermin ist Samstag, der 29.07.2006 um 10:00h im MS3.1. Es werden keine Hilfsmittel zugelassen, Papier wird bereitgestellt. Vergessen Sie Ihren gültigen Personal- und Studenausweis nicht.**

### 1. Kurzfragen

Beantworten Sie folgende Fragen:

- Überprüfen Sie, ob es sich bei dem folgenden Differential um ein exaktes Differential handelt:  $y' = \frac{2+y e^{xy}}{2y-x e^{xy}}$ .
- Ist die folgende Funktion  $f(z) = z \sin(z)$  analytisch?
- Zeichnen Sie die Verzweigungslinien der Funktion  $f(z) = z^{1/3}$ .
- Berechnen Sie  $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x^2 + 2x) \sin(x) dx$
- Schreiben Sie folgende komplexe Zahlen um in die Euler-Darstellung:  $z = -1$ ,  $z = 2i$  und  $z = 1 - i$ .

### 2. Potenz-/Laurentreihenentwicklungen

Entwickeln Sie folgende Ausdrücke in Potenz-/Laurentreihen um  $x_0$  (in allen Konvergenzgebieten) und geben Sie die Konvergenzradien an:

- $f(x) = \sin(x)$ ,  $x_0 = \pi$
- $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$ ,  $x_0 = 1$

### 3. Residuensatz

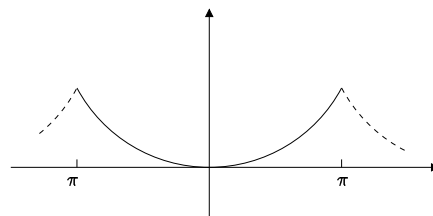
Berechnen/Zeigen Sie:

- $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{a+b \sin(\varphi)} d\varphi$ ,  $a > |b|$
- $\int_0^{\infty} \frac{\sin^2(x)}{x^4+2x^2+1} dx$
- $\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots = \frac{\pi^2}{12}$

Betrachten Sie zur Lösung der letzten Teilaufgabe die Funktion:  $F(z) = \frac{\pi}{z^2 \sin(\pi z)}$

### 4. Fourier-Reihen

Entwickeln Sie die periodisch fortgesetzte Funktion  $f(x) = x^2$  in eine Fourier-Reihe. Entnehmen Sie die Periodizität der Abbildung.



## 5. Differentialgleichungen

Berechnen Sie die Lösungen folgender Differentialgleichungen.

(a)

$$y' + 2xy = 2x^3, y(0) = 1$$

(b)

$$y'' + 4y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 2$$

Lösung durch i) Rückführung auf System 1er Ordnung und ii) Laplace-Transformation.

## 6. Partielle Differentialgleichungen

Betrachten Sie die Laplace-Gleichung in zwei Dimensionen

$$\Delta \Psi(x, y) = 0.$$

(a) Welche gewöhnlichen Differentialgleichungen erhalten Sie für die Funktion  $X(x)$  und  $Y(y)$  in dem Separationsansatz

$$\Psi(x, y) = X(x)Y(y)$$

aus der Laplace-Gleichung? Wie lauten die allgemeinen Lösungen dieser gewöhnlichen Differentialgleichungen?

(b) Auf dem Rechteck

$$-1 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq \pi$$

sind nun die Randbedingungen

$$\Psi(x = \pm 1, y) = \cosh(1) \sin(y), \quad \Psi(x, y = 0) = 0 = \Psi(x, y = \pi)$$

vorgegeben. Bestimmen Sie die zugehörige Lösung  $\Psi(x, y)$  der Laplace-Gleichung.

## 7. Schwingungen der quadratischen Membran

Überlegen Sie sich die Lösungen der Wellengleichung (allgemeine Lösung sei bekannt → Vorlesung) für nachfolgende drei Chladnische Klangfiguren einer quadratischen Membran:

