Technische Universität Braunschweig

INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

Rechenmethoden der Physik

Skriptum zur Vorlesung

Sechste, überarbeitete Auflage

Sommersemester 2019

Prof. Dr. U. Motschmann

PD Dr. S. Simon

Dipl.-Phys. H. Kriegel

PD Dr. Y. Narita

P. Meier, M. Sc.

Dr. M. Feyerabend

Braunschweig, 2019

Inhaltsverzeichnis

0 Einleitung **9**

1 Differentiation und Integration im $\mathbb{R}^3$ **11**

1 Differentialrechnung 11

1.1 Partielle Ableitung 11

1.2 Differentiationsregeln 14

1.3 Extremwertaufgaben 16

1.4 Taylor-Reihen 20

2 Integralrechnung 22

2.1 Integrationsregeln 22

2.2 Integration entlang einer Kurve 26

2.3 Flächenintegral 29

2.4 Oberflächenintegral 34

2.5 Volumenintegral 36

2 Differentiation und Integration im Komplexen **39**

1 Komplexe Zahlen 39

2 Komplexe Funktionen 43

3 Differentiation 45

4 Integration 47

4.1 Integralsatz von Cauchy 48

4.2 Integralformel von Cauchy 52

4.3 Residuensatz 53

3 Differentiation und Integration von Vektorfeldern **57**

1 Vektoren . . . 57
2 Differentiation von Vektoren . . . 59
2.1 Gradient . . . 60
2.2 Divergenz . . . 63
2.3 Rotation . . . 64
2.4 Indexschreibweise und Summenkonvention . . . 66
2.5 Mehrfachoperationen . . . 67
3 Integration von Vektoren . . . 68
3.1 Vektorielle Integralausdrücke . . . 68
3.2 Green-Integralsatz der Ebene . . . 71
3.3 Stokes-Integralsatz . . . 73
3.4 Gauß-Integralsatz . . . 76
3.5 Derivate der Integralsätze . . . 83
3.6 Ausblick . . . 84

4 Krummlinige Koordinatensysteme **85**
1 Kovariante Basis und kontravariante Basis . . . 86
2 Metrischer Fundamentaltensor . . . 88
3 Determinante . . . 91
4 Skalarprodukt . . . 93
5 Vektorprodukt . . . 93
6 Differentiation in krummlinigen Koordinaten . . . 95
6.1 Gradient . . . 96
6.2 Divergenz . . . 97
6.3 Rotation . . . 97
6.4 Laplace-Operator . . . 98
7 Orthogonale Koordinaten . . . 99
7.1 Gradient . . . 101
7.2 Divergenz . . . 101
7.3 Rotation . . . 102
7.4 Laplace-Operator . . . 103
8 Spezielle Koordinatensyteme . . . 103

8.1 Zylinderkoordinaten . . . 104
8.2 Kugelkoordinaten . . . 106

5 Elemente der Tensorrechnung 109

1 Begriff des Tensors . . . 109
2 Tensor-Operationen . . . 114
3 Beispiele . . . 116

6 Spezielle Funktionen 123

1 Legendre-Funktionen . . . 123
1.1 Legendre-Gleichung . . . 123
1.2 Legendre-Polynome (Legendre-Funktion erster Gattung) . . . 124
1.3 Darstellungen und Formeln . . . 126
1.3.1 Rodrigues-Formel . . . 126
1.3.2 Schläfli-Integral . . . 127
1.3.3 Erzeugende Funktion . . . 128
1.3.4 Trigonometrische Darstellung . . . 128
1.3.5 Rekursionsformeln . . . 129
1.4 Entwicklung nach Legendre-Polynomen . . . 129
1.5 Zugeordnete Legendre-Funktion . . . 131
1.6 Laplace-Gleichung im Polarkoordinatensystem . . . 132
1.7 Kugelflächenfunktionen . . . 132
2 Bessel-Funktionen . . . 134
2.1 Bessel-Differentialgleichung . . . 134
2.2 Variante der Bessel-Funktionen . . . 137
2.3 Rekursionsformeln . . . 140
2.4 Erzeugende Funktion und Integraldarstellung . . . 140
2.5 Sphärische Bessel-Funktionen . . . 143
2.6 Fourier-Bessel-Entwicklung . . . 145
2.7 Laplace-Gleichung in Zylinderkoordinaten . . . 147
3 Hermite-Polynome . . . 148
3.1 Fundamentale Eigenschaften . . . 148

3.2 Differentialgleichung und Orthogonalität . . . 150
3.3 Diskussion . . . 151
4 Laguerre-Polynome . . . 152
4.1 Fundamentale Eigenschaften . . . 153
4.2 Differentialgleichung und Orthogonalität . . . 154
4.3 Zugeordnete Laguerre-Polynome . . . 155

7 Differentialgleichungen 159

1 Begriff und Klassifikation . . . 159
2 Gewöhnliche Differentialgleichungen . . . 161
2.1 Differentialgleichungen 1. Ordnung . . . 161
2.1.1 Lineare Differentialgleichungen . . . 161
2.1.2 Nichtlineare Differentialgleichungen . . . 163
2.2 Lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung . . . 168
2.2.1 Struktur der Lösung . . . 168
2.2.2 Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten . . . 171
2.2.3 Lösung von Differentialgleichungen mit Integraltransformationen . 173
2.2.4 Lösung mit Potenzreihenansätzen . . . 174
2.3 Systeme von Differentialgleichungen 1. Ordnung . . . 176
2.3.1 Dgln. höherer Ordnung und Systeme von Dgln. 1. Ordnung . . . 176
2.3.2 Lineare Systeme von Differentialgleichungen 1. Ordnung . . . 177
3 Partielle Differentialgleichungen . . . 179
3.1 Lineare partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung . . . 179
3.2 Laplace-Gleichung . . . 181
3.2.1 Randwertproblem auf einem begrenzten Gebiet . . . 181
3.2.2 Unbegrenztes Gebiet in einer Richtung . . . 182
3.3 Poisson-Gleichung . . . 183
3.3.1 Randwertproblem auf einem begrenzten Gebiet . . . 183
3.4 Wellengleichung . . . 185
3.4.1 Die d'Alembert-Methode . . . 185
3.4.2 Fourier-Analyse auf einem begrenzten Gebiet . . . 187
3.5 Fourier-Analyse auf einem unbegrenzten Gebiet . . . 188

3.6 Wärmeleitungsgleichung 190
3.6.1 Homogene Gleichung auf einem begrenzten Gebiet 190
3.6.2 Inhomogene Gleichung auf einem begrenzten Gebiet 192
3.6.3 Fourier-Analyse 193
3.7 Green-Funktion 194

8 Integraltransformationen **197**
1 Funktion und Transformierte 197
2 Fourier-Tansformation 197
3 Laplace-Transformation 204

9 Differentialformen **207**
1 Motivation 207
2 Äußeres Produkt 208
3 Äußere Ableitung 212
4 Integralsätze 216

Satz: LaTeX2$_\varepsilon$

Danksagung

Ich danke allen, die an der Entstehung dieses Skripts mitgewirkt haben.

Dies waren insbesondere

- Sven Simon, der die Edition organisierte.
- Matthias Grzeschik, der mit viel Engagement die Grafiken angefertigt hat.
- Johannes Gütschow, der mit größter Sorgfalt die Textpassagen und die umfangreichen Formelblöcke erstellte.
- Jörg Duhme, Hendrik Kriegel, Willi Exner, Patrick Meier, Moritz Feyerabend, die die überarbeitete Fassung des Skripts erstellten.

Braunschweig, April 2019

Uwe Motschmann

Kapitel 0

Einleitung

Die Vorlesung „Mathematische Methoden der Physik“ wird in der Physikausbildung an den deutschen Universitäten immer wieder als äußerst wichtig beschworen. Allerdings ist sie neben der Theoretischen Mechanik, Elektrodynamik und Thermodynamik/Statistik die inhaltlich am geringsten homogenisierte und am stärksten von den Vorlieben des lesenden Dozenten geprägt. Das wird hier wohl nicht anders sein. Das Bemühen, nichts Nachhaltiges auszulassen, sei den Studierenden jedoch versichert.

Verausgesetzt wird für diese Vorlesung der parallele Besuch der Mathematikausbildung des ersten Semesters, also der Einstieg in die Analysis und die Grundlagen der linaren Algebra. Überschneidungen mit den Mathematik-Vorlesungen kommen vor, sind erfahrungsgemäß aber keine wirkliche Redundanz, da die Akzente auch bei gleicher Überschrift deutlich anders gesetzt sind.

Auf Beweise wird hier mitnichten vollständig verzichtet. In der Regel beschränken wir uns aber auf die Kernrechnungen oder auch nur auf die Beweisidee. Wir ignorieren damit keineswegs die Exaktheit des Mathematikers etwa bei der Formulierung der Voraussetzungen. Eher bringen wir zum Ausdruck, daß letztlich nur bewiesene Aussagen wirklich befriedigend sind - und daß wir zur mathematischen Perfektion sehr wohl bereit sind. Letztendlich soll diese Vorlesung gerade nicht zu den Mathematikvorlesungen konkurrieren, sondern die bewährte Verbindung zwischen den Mathematikern und Theoretischen Physikern nutzen.

Wichtig: Die Voraussetzungen für die Gültigkeit von Sätzen werden in der Regel nicht explizit aufgeführt. Sie werden stillschweigend angenommen.

Kapitel 1

Differentiation und Integration im $\mathbb{R}^3$

1 Differentialrechnung

1.1 Partielle Ableitung

Zur Erinnerung schauen wir uns erstmal an, was eine Ableitung im $\mathbb{R}^1$ bedeutet. Die Ableitung einer Funktion f nach der Variablen x ist das Verhältnis von der Änderung des Funktionswertes zur Änderung des x-Wertes Δx bei infinitesimaler Änderung Δx.

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \tag{1.1}$$

Hier wird stillschweigend vorausgesetzt, daß die Ableitungen existieren. Gebräuchliche Notationen für die Ableitung sind

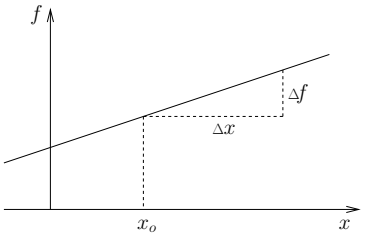
$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f = \mathrm{d}_x f = f'.$$

Beispiele: 1. $f(x)$ linear: $f(x) = mx + n$

$$f' = m = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

$$\curvearrowright f(x) = mx_o + n + m(x - x_o)$$
$$f(x) = \quad f(x_o) \quad + f' \quad \Delta x$$

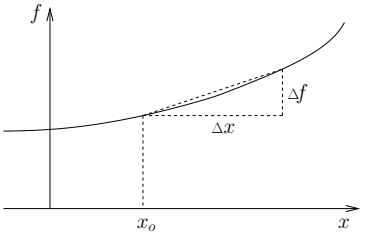
Hier gilt offensichtlich $\Delta\, f = f' \cdot \Delta x$.



2. $f(x)$ nichtlinear

$$f(x) = f(x_o) + \Delta f$$

Hier gilt im allgemeinen $\Delta\, f \neq f' \cdot \Delta x$.



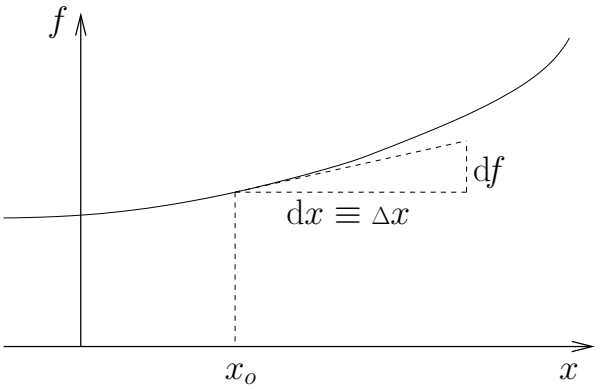
Wir definieren das Differential $\mathrm{d}f$ als

$$\mathrm{d}f(x_o, x) = f'(x_o) \cdot \Delta x$$

mit $\Delta x = x - x_o$. Für Δx schreibt man ebenfalls $\mathrm{d}x$ ($\mathrm{d}x \equiv \Delta x$).

$$\curvearrowright \mathrm{d}f(x_o, x) = f'(x_o) \cdot \mathrm{d}x \tag{1.2}$$

Das Differential beschreibt daher eine Tangente an die Funktion f bei x_o.



Für kleine Δx gilt als Approximation

$$\Delta f \approx \mathrm{d}f, \tag{1.3}$$

so daß

$$f(x) = f(x_o) + \Delta f \approx f(x_o) + \mathrm{d}f = f(x_o) + f'(x_o)\,\mathrm{d}x. \tag{1.4}$$

Die partiellen Ableitungen für eine Funktion

$$f(x, y) \quad | \quad \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1$$

sind definiert als

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}, \end{aligned} \tag{1.5}$$

wobei die jeweils nicht abgeleitete Variable konstant zu halten ist. Zur deutlicheren Hervorhebung schreibt man z.B. ebenfalls $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y$, d.h. beim Ableiten nach x ist y konstant zu halten.

Die verdeutlichende Schreibweise ist insbesondere in der Thermodynamik üblich. Zum Beispiel ist die partielle Ableitung der Entropie σ nach der Inneren Energie U das Inverse der Temperatur τ.

$$\sigma(U, N, V)$$
$$\left(\frac{\partial \sigma}{\partial U}\right)_{N,V} = \frac{1}{\tau}$$

σ	Entropie
U	Innere Energie
N	Teilchenzahl
V	Volumen
τ	Temperatur

Höhere partielle Ableitungen werden entsprechend definiert.

Gebräuchliche Notationen für partielle Ableitungen sind

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} f = \partial_x f = f_x \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} = \partial_x \partial_y f = f_{xy} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \partial_x^2 f = \partial_x \partial_x f = f_{xx}\end{aligned} \tag{1.6}$$

Beispiel:

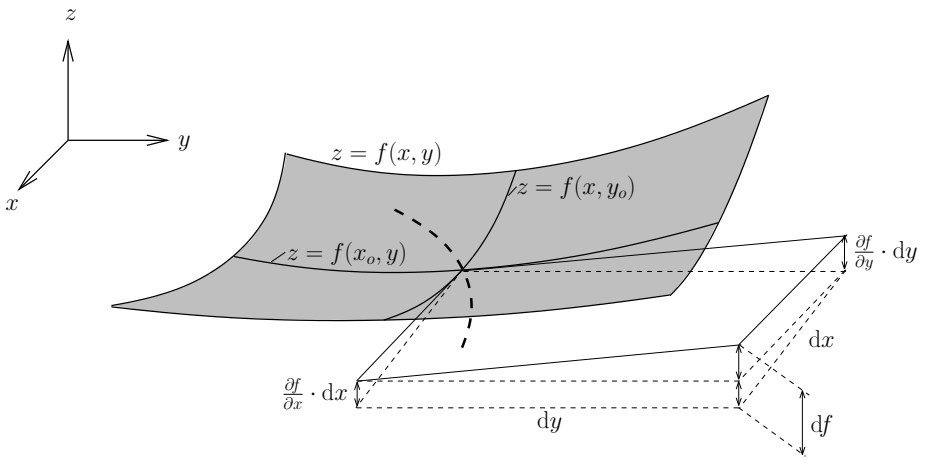
$$\begin{aligned} f(x,y) &= x^3 y - e^{xy} \\ \partial_x f &= 3x^2 y - y\, e^{xy} \\ \partial_x^2 f &= 6xy - y^2 e^{xy} \\ \partial_y f &= x^3 - x\, e^{xy} \\ \partial_y^2 f &= -x^2 e^{xy} \\ \partial_x \partial_y f &= 3x^2 - e^{xy}(1+xy) = \partial_y \partial_x f \end{aligned}$$

Das totale oder vollständige Differential $\mathrm{d}f$ für eine Funktion $f(x,y)$ an der Stelle (x_o, y_o) wird definiert durch

$$\mathrm{d}f(x_o, y_o, x, y) = \partial_x f(x_0, y_0) \cdot \mathrm{d}x + \partial_y f(x_0, y_0) \cdot \mathrm{d}y, \tag{1.7}$$

mit $\mathrm{d}x \equiv \Delta x \equiv x - x_o$ und $\mathrm{d}y \equiv \Delta y \equiv y - y_o$.

Neben dem Begriff des vollständigen Differentials existiert auch das weniger gebräuchliche unvollständige Differential. In der Thermodynamik existiert dafür sogar ein eigenständiges Symbol ‚δ' statt ‚d', z.B. δA für das unvollständige Differential der Arbeit A.



Für $z = f(x,y)$ beschreibt

$$\mathrm{d}f = \partial_x f \mathrm{d}x + \partial_x f \mathrm{d}y = \mathrm{d}z$$

die Ebenengleichung im Punkt (x_o, y_o) an die Fläche $z = f(x,y)$ im Sinne

$$\partial_x f(x_o, y_o) \cdot (x - x_o) + \partial_y f(x_o, y_o) \cdot (y - y_o) = z - z_o.$$

Die Betrachtungen können problemlos auf Funktionen mit mehr als zwei Veränderlichen verallgemeinert werden. Für

$$f(x,y,z) \qquad | \quad \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^1$$

gilt dann entsprechen

$$\mathrm{d}f = \partial_x f \, \mathrm{d}x + \partial_y f \, \mathrm{d}y + \partial_z f \, \mathrm{d}z. \tag{1.8}$$

1.2 Differentiationsregeln

Die bekannten Regeln für Funktionen im $\mathbb{R}^1$, $f(x) \mid \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$, gelten im übertragenen Sinn für partielle Ableitungen ebenfalls.

Beispiel: $z = f(x,y)$ gegeben durch

$$z \, \ln z + xy \, e^{xy} = 0,$$

Zu bilden ist $\partial_x z$:

$$\partial_x z \, \ln z + z \, \frac{1}{z} \, \partial_x z + y \, e^{xy} + xy^2 e^{xy} = 0$$

$$\partial_x z = -\frac{1+xy}{1+\ln z} \, y \, e^{xy}$$

Hierbei wurden verwendet:

- implizite Differentiation
- Kettenregel: $\partial_x \ln z = \partial_z \ln z \cdot \partial_x z = \frac{1}{z} \, \partial_x z$

Satz von Schwarz: Für eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $f(x_1, x_2, \ldots x_n) \mid \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gilt:

$$\partial_{x_i} \partial_{x_j} f = \partial_{x_j} \partial_{x_i} f. \tag{1.9}$$

Oder für eine Funktion $f(x,y) \mid \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1$:

$$\partial_x \partial_y f = \partial_y \partial_x f. \tag{1.10}$$

Beweis:

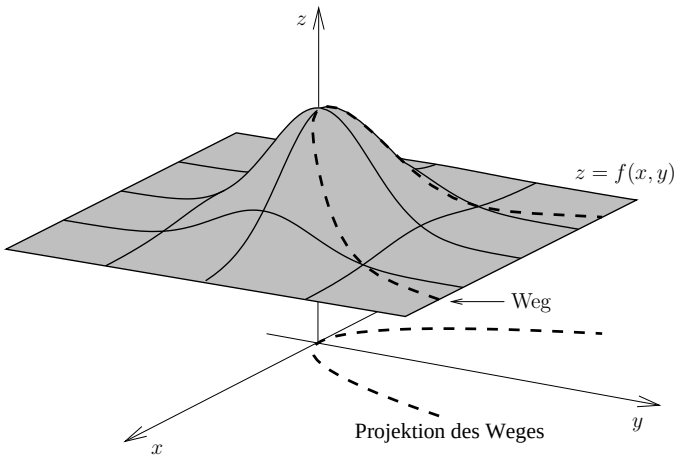
$$\begin{aligned}
\partial_x \partial_y f &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\partial_y f(x+\Delta x, y) - \partial_y f(x,y)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x+\Delta x, y)}{\Delta y} - \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x,y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x+\Delta x, y) - f(x, y+\Delta y) + f(x,y)}{\Delta x \, \Delta y} \\
&= \lim_{\Delta y \to 0} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y) - f(x+\Delta x, y) + f(x,y)}{\Delta y \, \Delta x} \\
&= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y)}{\Delta x} - \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}}{\Delta y} \\
&= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\partial_x f(x, y+\Delta y) - \partial_x f(x,y)}{\Delta y} \\
&= \partial_y \partial_x f
\end{aligned}$$

q.e.d.

Die partiellen Ableitungen $\partial_x f$ und $\partial_y f$ einer Funktion $f(x,y) \mid \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1$ stellen Ableitungen entlang der Koordinatenlinien x bzw. y dar. Für eine Änderung von f bei (x_o, y_o) entlang einer anderen Linie in der x-y-Ebene, z.B. entlang des gestrichelten Weges in Abbildung auf Seite 13, wird der Weg mittels des Kurvenparameters t durch $x(t)$ und $y(t)$ parametrisiert. Die Änderung von f entlang des Weges ist die Ableitung von $f(x(t), y(t))$ nach t. Eine solche Ableitung nennt man totale Ableitung $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$ beziehungsweise $\mathrm{d}_t f$. Nach der Kettenregel gilt

$$\mathrm{d}_t f = \partial_x f \cdot \mathrm{d}_t x + \partial_y f \cdot \mathrm{d}_t y. \tag{1.11}$$

Beispiel: Funktion: $z = f(x,y) = e^{-(ax^2+by^2)}$; $a, b > 0$
Weg: $x(t) = t$, $y(t) = t^2$



$$\begin{aligned} \mathrm{d}_t z &= (-2ax\ \mathrm{d}_t x - 2by\ \mathrm{d}_t y)e^{-(ax^2+by^2)} \\ &= (-2a\ t - 2b\ 2t^3)e^{-(at^2+bt^4)} \\ &= -2t(a + 2bt^2)e^{-(at^2+bt^4)} \end{aligned}$$

Der Unterschied von totaler und partieller Ableitung wird sichtbar, wenn eine Bildung der partiellen Ableitung $\partial_t f$ möglich ist. Betrachtet man zunächst eine Funktion $z = f(x,y)$, mit der Interpretation als stationäres Gebirge. Die Koordinaten $(z(t), x(t), y(t))$ beschreiben einen Weg im Gebirge mit t als Zeit, die beim Entlangwandern des Weges verstreicht. Dies entspricht der Situation der im vorangegangenen Beispiel vorgenommenen Untersuchung der Höhenänderung $\mathrm{d}_t z$.

Wird dagegen eine Funktion $z = f(x,y,t)$ betrachtet, was zum Beispiel einem schwankenden Gebirge entspricht (nur wellenartige Schwankungen ohne Risse sind erlaubt, so daß die Stetigkeit von f gewahrt bleibt), dann hat die Höhenänderung $\mathrm{d}_t z$ nun zwei Ursachen:

1. Die Höhenänderung durch die eigene Bewegung entlang des Weges.
2. Die Höhenänderung durch Schwanken des Gebirges auch ohne eigene Bewegung entlang des Weges.

Durch Anwendung der Kettenregel erhält man

$$\begin{aligned} \mathrm{d}_t z = \mathrm{d}_t f &= \partial_t f \cdot \underbrace{\mathrm{d}_t t}_{=1} + \partial_x f \cdot \mathrm{d}_t x + \partial_y f \cdot \mathrm{d}_t y \\ &= \partial_t f \qquad\quad + \partial_x f \cdot \mathrm{d}_t x + \partial_y f \cdot \mathrm{d}_t y. \end{aligned}$$

Somit gilt im Allgemeinen:

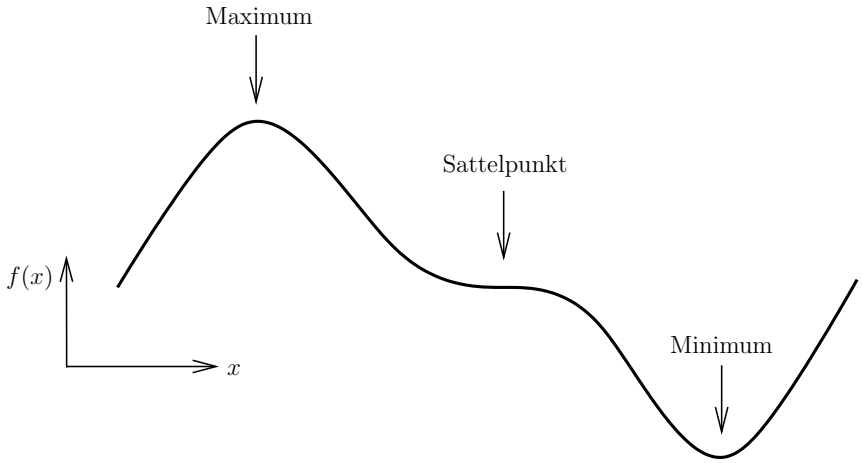
$$\mathrm{d}_t f \neq \partial_t f. \tag{1.12}$$

Die partielle Ableitung $\partial_t f$ wird auch explizite Änderung von f mit t genannt, d.h. die Änderung von „außen“ verursacht.

1.3 Extremwertaufgaben

Zunächst sei an die Funktion $f(x) \mid \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ erinnert. Für sie gilt

$f'(x^*) = 0$	$\curvearrowright$	Extremwert bei x^*
$f''(x^*) > 0$		Minimum
$f''(x^*) < 0$		Maximum
$f''(x^*) = 0$		Sattelpunkt



In der Darstellung mit Hilfe des Differentials ist am Extrempunkt durch $f' = 0$ auch

$$\mathrm{d}f = f' \cdot \mathrm{d}x = 0. \tag{1.13}$$

Bei einer Funktion in zwei Dimensionen, $f(x, y) \mid \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1$ verschwindet an einem Extremalpunkt das totale Differential:

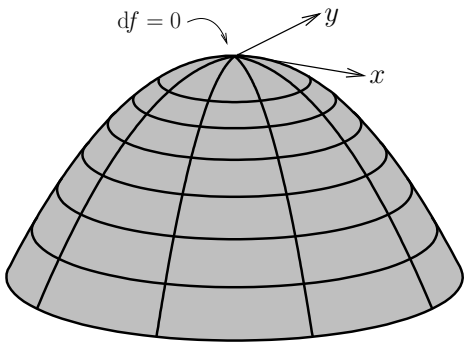
$$\mathrm{d}f = \partial_x f \cdot \mathrm{d}x + \partial_y f \cdot \mathrm{d}y = 0, \tag{1.14}$$

was nach einem Koeffizientenvergleich gleichbedeutend damit ist, daß alle partiellen Ableitungen verschwinden

$$\partial_x f = 0, \quad \partial_y f = 0. \tag{1.15}$$

Anschaulich ist die Bedingung für einen Extremalpunkt die Parallelität der Tangentialebene mit der x-y-Ebene.

Die Art des Extremums ergibt sich bei physikalischen Anwendungen meist aus der Aufgabenstellung. In der Regel ist bei physikalischen Aufgaben nach einem Minimum zu suchen, z.B. Energieminimierung, minimale Zeit, minimaler Weg oder minimale Wirkung.



Formal sind die Bedingungen über die Art der Extremas in zwei Dimensionen durch eine Determinante D angebbar. Diese ist definiert durch

$$D \equiv \det \begin{pmatrix} \partial_x^2 f & \partial_x \partial_y f \\ \partial_y \partial_x f & \partial_y^2 f \end{pmatrix}. \tag{1.16}$$

Ohne Ableitung geben wir an wie sich damit die Art des Extremums feststellen läßt:

$$\begin{array}{llll} D > 0, & \partial_x^2 f > 0; & \partial_y^2 f > 0 & \curvearrowright \text{Minimum} \\ D > 0, & \partial_x^2 f < 0; & \partial_y^2 f < 0 & \curvearrowright \text{Maximum} \\ D < 0 & & & \curvearrowright \text{Sattelpunkt} \\ D = 0 & & & \curvearrowright \text{unbestimmt} \end{array} \tag{1.17}$$

Die Bedingung für Extrema von Funktionen $f(x_1, \ldots x_n)$ mit n Variablen $x_1, \ldots x_n$ ist weiterhin $\mathrm{d}f = 0$. Für ein Minimum muß $D = \det(\partial_{x_i} \partial_{x_j} f)$ positiv definit sein, d.h. $\sum_{i,j=1}^{n} a_i a_j \partial_{x_i} \partial_{x_j} f \geq 0$ für alle $a_i, a_j \in \mathbb{R}$.

Extrema mit Nebenbedingungen

Die Suche nach Extrema einer Funktion $f(x, y)$, z.B. eines Gebirges, entlang eines Weges $y = h(x)$ ist eine Extremwertbestimmung mit Nebenbedingungen. Wir bringen die Aufgabenstellung in folgende Form:

$$\begin{gathered} z = f(x, y) \quad \text{soll extremal sein} \\ \text{unter der Nebenbedingung} \quad h(x) - y = g(x, y) = 0 \end{gathered}$$

- 1. Lösungsmöglichkeit: Rückführung auf ein Problem ohne Nebenbedingung durch Elimination.

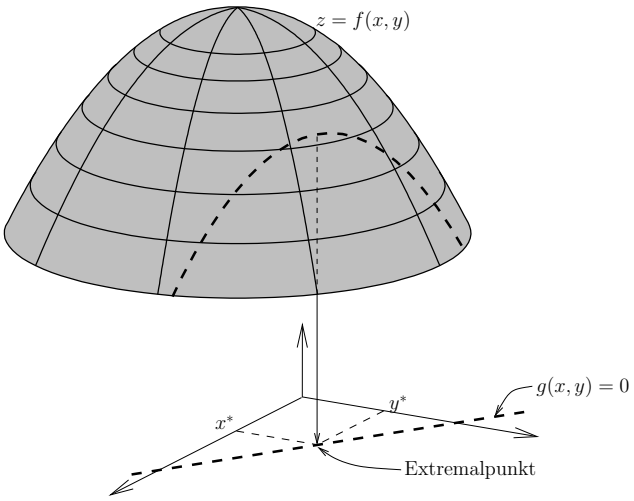
  Auflösen der Nebenbedingung nach y:

  $$y = h(x),$$

  Elimination von y:

  $$z = f(x, h(x)) = \tilde{f}(x),$$

  womit die Frage nach Extrema auf ein Problem ohne Nebenbedingungen zurückgeführt ist. Technisch kann die explizite Auflösung der Nebenbedingung nach einer Koordinate jedoch schwierig bis unmöglich sein, insbesondere bei höheren Dimensionen.



- 2. Lösungsmöglichkeit: Langrange-Methode mit Langrange-Multiplikatoren

  Am Extremalpunkt (x^*, y^*) entlang des Weges $g(x, y) = 0$ gilt offensichtlich

  $$\mathrm{d}f = 0$$

  also

  $$\mathrm{d}f = \partial_x f(x^*, y^*)\,\mathrm{d}x + \partial_y f(x^*, y^*)\,\mathrm{d}y = 0 \tag{1.18}$$

  $\mathrm{d}x$ und $\mathrm{d}y$ sind aber nicht unabhängig voneinander, sondern durch $g(x, y) = 0$ miteinander verknüpft. Bildung des Differentials von $g = 0$ ergibt

  $$\mathrm{d}g = 0 = \partial_x g \cdot \mathrm{d}x + \partial_y \cdot \mathrm{d}y \quad \curvearrowright \quad \mathrm{d}y = -\frac{\partial_x g}{\partial_y g}\mathrm{d}x. \tag{1.19}$$

  Da $\mathrm{d}x$ und $\mathrm{d}y$ nicht voneinander unabhängig sind, kann auch nicht unabhängig voneinander

  $$\partial_x f = 0 \quad \text{und} \quad \partial_y f = 0$$

  gefordert werden. O.B.d.A. wird $\mathrm{d}x$ als unabhängig und $\mathrm{d}y$ als abhängig betrachtet.

  Wir machen einen zunächst etwas künstlich erscheinenden Ansatz, in den ein neuer Parameter λ eingefügt wird:

  $$0 = \mathrm{d}f + \lambda \cdot \mathrm{d}g. \tag{1.20}$$

  Diese Gleichung gilt mit Sicherheit am Extrempunkt (x^*, y^*) entlang des Weges $g(x, y) = 0$, da am Extrempunkt $\mathrm{d}f = 0$ ist und $\mathrm{d}g = 0$ gilt sowieso entlang des gesamten Weges. Die Ausdrücke für $\mathrm{d}f$ und $\mathrm{d}g$ werden eingesetzt und die Terme umsortiert. Dann folgt

  $$\begin{aligned} 0 &= \partial_x f \cdot \mathrm{d}x + \partial_y f \cdot \mathrm{d}y + \lambda\,\partial_x g \cdot \mathrm{d}x + \lambda\,\partial_y g \cdot \mathrm{d}y \\ 0 &= (\partial_x f + \lambda\,\partial_x g)\,\mathrm{d}x + (\partial_y f + \lambda\,\partial_y g)\,\mathrm{d}y. \end{aligned}$$

  λ ist zunächst noch ein freier Parameter, der Langrange-Multiplikator, der jedoch so gewählt wird, daß

  $$\partial_y f + \lambda\,\partial_y g = 0. \tag{1.21}$$

  Es verbleibt zur Erfüllung von (1.20):

  $$(\partial_x f + \lambda\,\partial_x g)\,\mathrm{d}x = 0, \tag{1.22}$$

was wegen der Unabhängigkeit von dx durch

$$\partial_x f + \lambda\, \partial_x g = 0 \tag{1.23}$$

erreicht wird. Somit folgen die drei Bedingungsgleichungen

$$\begin{aligned} \partial_x f + \lambda\, \partial_x g &= 0 \\ \partial_y f + \lambda\, \partial_y g &= 0 \\ g(x,y) &= 0 \end{aligned} \tag{1.24}$$

für die drei Variablen x, y und λ am Extrempunkt.

- äquivalenten Formulierung

  Der obigen Langrange-Methode ist die folgende leicht einprägbare Methode äquivalent. Zunächst definiere man eine neue Funktion L mit

  $$L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda\, g(x,y) \tag{1.25}$$

  Für $L(x,y,\lambda)$ ist nun eine Extremwertaufgabe ohne jegliche Nebenbedingungen zu lösen.

  Die Bestimmung der Extrema dieser Funktion führt auf die zu (1.24) äquivalenten Bestimmungsgleichungen

  $$\begin{aligned} \partial_x L &= 0 \\ \partial_y L &= 0 \\ \partial_\lambda L &= 0, \end{aligned} \tag{1.26}$$

  denn die Differentialbildung liefert

  $$\begin{aligned} 0 &= \mathrm{d}L \\ &= \partial_x L \cdot \mathrm{d}x + \partial_y L \cdot \mathrm{d}y + \partial_\lambda l \cdot \mathrm{d}\lambda \\ &= \partial_x f \cdot \mathrm{d}x + \lambda\, \partial_x g \cdot \mathrm{d}x + \partial_y f \cdot \mathrm{d}y + \lambda\, \partial_y g + g \cdot \mathrm{d}\lambda \\ &= (\partial_x f + \lambda\, \partial_x g)\, \mathrm{d}x + (\partial_y f + \lambda\, \partial_y g)\, \mathrm{d}y + g \cdot \mathrm{d}\lambda, \end{aligned}$$

  woraus nach Koeffizientenvergleich

  $$\partial_x f + \lambda\, \partial_x g = 0. \qquad \partial_y f + \lambda\, \partial_y g = 0 \qquad \text{und} \qquad g = 0$$

  folgt.

  In höheren Dimensionen und mit mehreren Nebenbedingungen gilt für

  $$\begin{aligned} f(x_1, \ldots x_n) \qquad & | \quad \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1 \\ g_i(x_1, \ldots x_n) = 0 \qquad & \text{mit} \quad i = 1, \ldots s < n. \end{aligned} \tag{1.27}$$

  die Funktion analog zu (1.25):

  $$L(x_1, \ldots x_n, \lambda_1, \ldots \lambda_s) = f(x_1, \ldots x_n) + \sum_{i=1}^{s} \lambda_i\, g_i(x_1, \ldots x_n), \tag{1.28}$$

  woraus die $n + s$ Bestimmungsgleichungen

  $$\begin{aligned} \partial_{x_i} L = 0 \qquad & i = 1, \ldots n \\ \partial_{\lambda_j} L = 0 \qquad & j = 1, \ldots s \end{aligned} \tag{1.29}$$

  für die Extrempunkte $(x_1^*, \ldots x_n^*)$ und die Langrange-Multiplikatoren $\lambda_1, \ldots \lambda_s$ folgen.

Ein Beispiel für die Anwendung dieses Verfahrens in der Theoretischen Mechanik ist die Bewegung unter dem Einfluß von Zwangskräften.

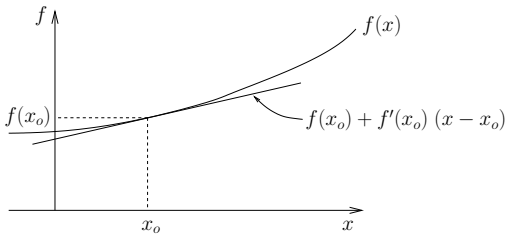
$$\begin{aligned} \text{Eingeprägte Kraft} &\rightarrow f \\ \text{Zwangskraft} &\rightarrow g \end{aligned}$$

Beispiele:
- Massenpunkte in Ebene
- Massenpunkt auf Stab
- Hantel auf Eisfläche
- u.s.w.

1.4 Taylor-Reihen

Wie schon in Kapitel 1.1 gezeigt, kann die Funktion $f(x)$ in der Umgebung von x_o durch $f(x_o)$ und $f'(x_o)$ approximiert werden.

$$\begin{aligned} f(x) &\approx f(x_o) + \mathrm{d}f \\ &\approx f(x_o) + f'(x_o)\,(x - x_o) \end{aligned}$$



Die Genauigkeit kann erhöht werden, wenn höhere Ableitungen berücksichtigt werden.

Satz von Taylor:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\, f^{(n)}(x_o)\,(x - x_o)^n \qquad \forall\, x \in \text{Konvergenzgebiet} \tag{1.30}$$

Die ersten Terme dieser Reihe sind:

$$\begin{aligned} f(x) = f(x_o) \quad &+ \quad f'(x_o)\,(x - x_o) \\ &+ \quad \frac{1}{2}\, f''(x_o)\,(x - x_o)^2 \\ &+ \quad \frac{1}{3!}\, f'''(x_o)\,(x - x_o)^3 \\ &+ \quad \cdots . \end{aligned}$$

q.e.d.

Im Konvergenzgebiet werden Terme mit höheren Potenzen immer kleiner und können ggf. bei approximativen Betrachtungen weggelassen werden.

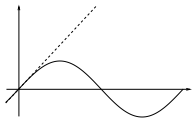
Approximation einer i.a. komplizierten Funktion $f(x)$ durch Terme der Potenzreihe (Polynom) ist für physikalische Anwendungen ggf. von Vorteil.

Besonders häufig wird eine lineare Approximation benutzt:

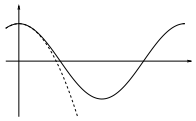
$$y = f(x) = f(x_o) + f'(x_o)\,(x - x_o) \qquad \text{für } x \text{ hinreichend nahe bei } x_o$$

Beispiele: für $x_o = 0$

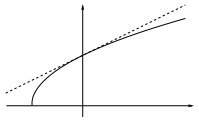
1. $y = \sin x \approx x$



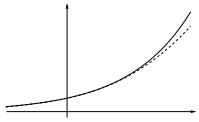
2. $y = \cos x \approx 1 - \frac{1}{2}x^2$



3. $y = \sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x$



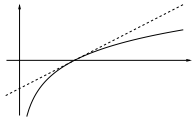
4. $y = e^x \approx 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3$



5. $y = \ln x$

   für $x_o = 0$ nicht möglich
   aber z.B. bei $x_o = 1$

   $y = \ln x \approx x - 1$



Für Funktionen mit mehreren Variablen gilt analoges. Exemplarisch betrachten wir eine Funktion $f(x,y) \mid \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1$. Die lineare Approximation liefert bei x_o, y_o

$$\begin{aligned} z = f(x,y) &\approx f(x_o,y_o) + \mathrm{d}f \\ &\approx f(x_o,y_o) + \partial_x f(x_o,y_o)\,(x - x_o) + \partial_y f(x_o,y_o)\,(y - y_o), \end{aligned} \tag{1.31}$$

und für höhere Ordnungen gilt

$$\begin{aligned} z = \;& f(x_o,y_o) + \partial_x f \cdot (x - x_o) + \partial_y f \cdot (y - y_o) \\ &+ \frac{1}{2}\left\{\partial_x^2 f \cdot (x - x_o)^2 + 2\partial_x\partial_y f \cdot (x - x_o)(y - y_o) + \partial_y^2 f \cdot (y - y_o)^2\right\} \\ &+ \cdots \end{aligned} \tag{1.32}$$

Diese Darstellung ergibt sich zwangsläufig aus dem Taylor-Satz im eindimensionalen Fall durch sukzessive Anwendung auf die Variablen. Betrachtung bis zu den zweiten Ordnungen liefert dann

$$\begin{aligned} z = f(x,y) &= f(x_o,y) + \partial_x f(x_o,y) \cdot (x - x_o) + \frac{1}{2}\partial_x^2 f(x_o,y) \cdot (x - x_o)^2 + \cdots \\ f(x_o,y) &= f(x_o,y_o) + \partial_y f(x_o,y_o) \cdot (y - y_o) + \frac{1}{2}\partial_y^2 f(x_o,y_o) \cdot (y - y_o)^2 + \cdots \\ \partial_x f(x_o,y) &= \partial_x f(x_o,y_o) + \partial_y\partial_x f(x_o,y_o) \cdot (y - y_o) + \cdots \\ \partial_x^2 f(x_o,y) &= \partial_x^2 f(x_o,y_o) + \cdots . \end{aligned}$$

Einsetzen liefert Gleichung (1.32).

Beispiel: $z = f(x,y) = x^y$ für $(x,y) \in U(1,1)$
d.h. $x_o = 1,\ y_o = 1$

$$\begin{aligned}
\partial_x f &= y \cdot x^{y-1}\big|_{x_o=1,y_o=1} = 1 \\
\partial_y f &= \partial_y e^{\ln x^y} = \partial_y e^{y\cdot\ln x} = x^y \ln x\big|_{x_o=1,y_o=1} = 0 \\
\partial_x^2 f &= y(y-1)x^{y-2}\big|_{x_o=1,y_o=1} = 0 \\
\partial_y^2 f &= x^y \ln^2 x\big|_{x_o=1,y_o=1} = 0 \\
\partial_x\partial_y f &= x^{y-1} + yx^{y-1}\ln x\big|_{x_o=1,y_o=1} = 1
\end{aligned}$$

$$\curvearrowright \qquad x^y \approx 1 + (x-1) + (x-1)(y-1) \qquad \text{für } (x,y) \in U(1,1)$$

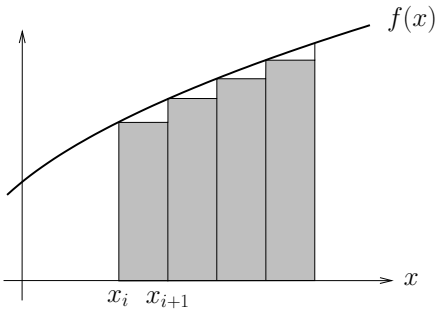
2 Integralrechnung

2.1 Integrationsregeln

Im $\mathbb{R}^1$ ist das Integral nach Riemann durch

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\tilde{x}_i)\,\Delta x_i \qquad \text{mit} \qquad \tilde{x}_i \in [x_i, x_{i+1}], \quad \Delta x_i = x_{i+1} - x_i \tag{1.33}$$

definiert. Somit ist das Integral der Grenzwert der Zerlegungssumme.



Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a) \tag{1.34}$$

mit der Stammfunktion F, die durch

$$\mathrm{d}_x F = f \tag{1.35}$$

definiert ist. Für das unbestimmte Integral gilt

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + \text{const.} \tag{1.36}$$

q.e.d.

Integrationsregeln:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x, \tag{1.37}$$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x, \tag{1.38}$$

$$\int_a^b k\,f(x)\,\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \tag{1.39}$$

und

$$\int_a^b \{f(x)+g(x)\}\;\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x. \tag{1.40}$$

Mittelwertsatz der Integralrechnung: Es gibt ein $x^* \in [a,b]$, so daß gilt:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(x^*)\,(b-a). \tag{1.41}$$

q.e.d.

Dreiecksungleichung:

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \le \int_a^b |f(x)|\;\mathrm{d}x \tag{1.42}$$

q.e.d.

Ein Integral eines Produktes kann unter Umständen durch partielle Integration gelöst werden

$$\int_a^b u\cdot v'\,\mathrm{d}x = [u\cdot v]_a^b - \int_a^b u'\cdot v\,\mathrm{d}x \tag{1.43}$$

und analog für unbestimmte Integrale.

Beispiel:

$$\begin{aligned}\int \ln x\,\mathrm{d}x = \int \underbrace{\ln x}_{u}\cdot\underbrace{1}_{v'}\mathrm{d}x &= x\,\ln x - \int \frac{1}{x}x\,\mathrm{d}x\\ &= x\,\ln x - x + \text{const}\end{aligned}$$

Ein Integral von verketteten Funktionen kann gegebenenfalls durch Substitution bzw. Transformation der Variablen gelöst werden.

Beispiel:

$$\int x\sqrt[3]{2x^2+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int u^{\frac{1}{3}}\,\mathrm{d}u = \frac{3}{16}\,u^{\frac{4}{3}} + \text{const}$$

$$\text{mit}\qquad u = 2x^2+1 \qquad \text{und} \qquad \mathrm{d}u = 4x\mathrm{d}x$$

Rationale Funktionen können immer mittels Partialbruchzerlegung integriert werden, so daß dadurch die Stammfunktion mit Hilfe von elementaren Funktionen angegeben werden kann.

Beispiele: $f(x)$ ist Quotient von Polynomen

1.
$$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x + 2}$$

2.
$$f(x) = \frac{x + 2}{x^2 - 5x + 6}$$

3.
$$f(x) = \frac{x + 2}{x^2 - 6x + 9}$$

- falls die Ordnung des Zählers größer oder gleich der Ordnung des Nenners ist, wie im Beispiel 1, kann man Polynomdivision ausführen.

$$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x + 2} = (x^2 - 5x + 6) : (x + 2) = x - 7 + \frac{20}{x + 2}$$
$$\underline{-(x^2 + 2x)}$$
$$-7x + 6$$
$$\underline{-(-7x - 14)}$$
$$20$$

$$\curvearrowright \quad \int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} - 7x + 20 \int \frac{1}{x + 2}\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} - 7x + 20\ln(x + 2) + \text{const}$$

- falls die Ordnung des Zählers kleiner als die Ordnung des Nenners ist, wie in Beispiel 2, kommt die Partialbruchzerlegung zum Zuge.

$$f(x) = \frac{x + 2}{x^2 - 5x + 6}$$

1. Faktorisierung des Nenners

$$x^2 - 5x + 6 = (x - x_1)(x - x_2) \qquad \text{mit den Nullstellen des Nenners } x_1 \text{ und } x_2$$

$$\curvearrowright \quad x_{1/2} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - 6}$$
$$= \frac{5}{2} \pm \frac{1}{2}$$
$$x_1 = 3, \qquad x_2 = 2$$
$$\curvearrowright \quad f(x) = \frac{x + 2}{(x - 3)(x - 2)}$$

2. Ansatz für die Partialbruchzerlegung

$$\frac{x + 2}{(x - 3)(x - 2)} = \frac{A}{x - 3} + \frac{B}{x - 2} \qquad ; \quad A, B = \text{const}$$

3. Bestimmung von A und B durch Koeffizienten. Vergleich oder Einsetzen spezieller x-Werte (hier Vorführung mit Koeffizientenvergleich).
   Multipliziert mit $(x-2)(x-3)$ ergibt sich:

$$x+2 = x(A+B) - (2A+3B)$$

$$\curvearrowright \qquad A+B=1, \qquad 2A+3B=-2$$

$$\curvearrowright \qquad A=5, \qquad B=-4$$

$$\curvearrowright \qquad f(x) = \frac{x+2}{x^2-5x+6} = \frac{5}{x-3} - \frac{4}{x-2}$$

4. Integration

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = 5\ln(x-3) - 4\ln(x-2) + \text{const}$$

- falls, wie im Beispiel 3, Mehrfach-Nullstellen im Nenner auftreten, ist die Partialbruchzerlegung in folgender Weise vorzunehmen:

$$f(x) = \frac{x+2}{x^2-6x+9}$$

1. Faktorisierung des Nenners

$$\begin{aligned} & x^2-6x+9 &&= 0 \\ \curvearrowright \qquad & x_{1/2} &&= 3 \pm \sqrt{9-9} = 3 \qquad \text{(Doppel-Nullstelle)} \\ \curvearrowright \qquad & x^2-6x+9 &&= (x-3)(x-3) = (x-3)^2 \end{aligned}$$

2. Ansatz für Partialbruchzerlegung

$$\frac{x+2}{x^2-6x+9} = \frac{A_1}{x-3} + \frac{A_2}{(x-3)^2} \qquad ; \quad A_1, A_2 = \text{const}$$

3. Bestimmung von A_1 und A_2 durch Koeffizientenvergleich oder Einsetzen spezieller x-Werte (hier Vorführung mit speziellen x-Werten).
   Multipliziert mit $(x-3)^2$ ergibt sich:

$$x+2 = A_1(x-3) + A_2$$

$$x=3: \qquad \curvearrowright 5 = A_2$$

$$\curvearrowright \qquad \frac{x+2}{x^2-6x+9} = \frac{A_1}{x-3} + \frac{5}{(x-3)^2}$$

$$x=4: \qquad \frac{4+2}{1} = \frac{A_1}{1} + \frac{5}{1} \qquad \curvearrowright A_1 = 1$$

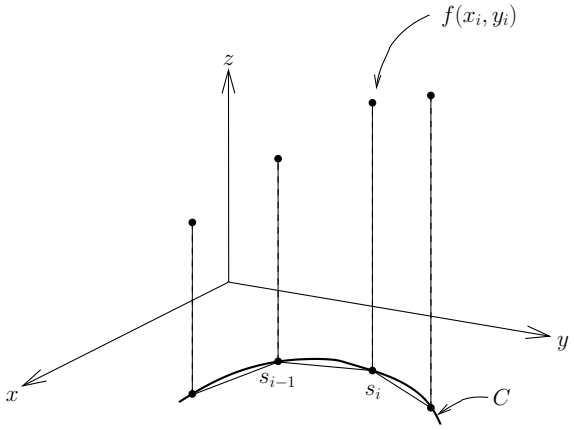
$$\curvearrowright \qquad f(x) = \frac{x+2}{x^2-6x+9} = \frac{1}{x-3} + \frac{5}{(x-3)^2}$$

4. Integration

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \ln(x-3) - 5(x-3)^{-1} + \text{const}$$

2.2 Integration entlang einer Kurve

Das Konzept vom Grenzwert der Zerlegungssumme ist übertragbar auf die Situation, bei der die x-Achse durch eine Kurve in der x-y-Ebene oder im Raum ersetzt ist. Daraus ergibt sich das Kurven- oder Linienintegral.



Betrachtet wird eine Funktion $z = f(x, y)$ und eine Kurve C in der x-y-Ebene mit der Bogenlänge s. Die Bogenlänge s wird von einem geeigneten Bezugspunkt aus gemessen. Die Kurve wird zerlegt in einen Polygonzug mit den Stützpunkten $(x_i, y_i) \in C$ mit der Länge der Polygonabschnitte $\Delta s_i = |s_i - s_{i-1}|$. Die Funktionswerte am Rand jedes Polygonabschnittes sind $f(x_i, y_i)$. Daraus folgt die Zerlegungssumme

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\ \Delta s_i \tag{1.44}$$

und das Integral als Grenzwert davon

$$\int_C f(x, y)\ \mathrm{d}s = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\ \Delta s_i \tag{1.45}$$

Das Linienintegral wird berechnet mittels eine Parameterdarstellung der Kurve C durch $x(t)$ und $y(t)$ mit den Anfangs- und Endwerten t_a und t_b. Diese wird in die Funktion $f(x, y)$ und in das Differential $\mathrm{d}s$ eingesetzt. Nach Pythagoras gilt

$$\begin{aligned} & \Delta s_i^2 &&= \Delta x_i^2 + \Delta y_i^2 \\ \curvearrowright\quad & \mathrm{d}s^2 &&= \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 \\ & && \mathrm{d}x = \mathrm{d}_t x \cdot \mathrm{d}t \\ & && \mathrm{d}y = \mathrm{d}_t y \cdot \mathrm{d}t \\ \curvearrowright\quad & \mathrm{d}s &&= \sqrt{(\mathrm{d}_t x)^2 + (\mathrm{d}_t y)^2}\ \mathrm{d}t. \end{aligned} \tag{1.46}$$

Man lese $\mathrm{d}x^2 = (\mathrm{d}x)^2 \neq \mathrm{d}\,(x)^2$.

$$\begin{aligned} \curvearrowright\quad \int_C f(x, y)\ \mathrm{d}s &= \int_{t_a}^{t_b} \underbrace{f(x(t), y(t))\ \sqrt{(\mathrm{d}_t x)^2 + (\mathrm{d}_t y)^2}}_{\equiv \tilde{f}(t)}\ \mathrm{d}t \\ &= \int_{t_a}^{t_b} \tilde{f}(t)\ \mathrm{d}t \end{aligned} \tag{1.47}$$

Damit ist das Linienintegral auf das Riemann-Integral im $\mathbb{R}^1$ zurückgeführt.

Bemerkung: Als Kurvenparameter kann ggf. auch x oder y dienen.

- x als Kuvenparameter:

$$\begin{aligned} x &= t, \qquad \mathrm{d}x = \mathrm{d}t \\ y &= y(t) = y(x) \\ \mathrm{d}s &= \sqrt{1 + \mathrm{d}_x y^2}\, \mathrm{d}x \end{aligned}$$

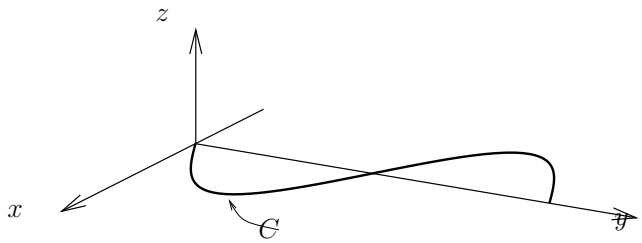
$$\int_C f(x,y)\, \mathrm{d}s = \int_{x_a}^{x_b} f(x, y(x))\, \sqrt{1 + \mathrm{d}_x y^2}\, \mathrm{d}x$$

- y als Kuvenparameter:

$$\begin{aligned} y &= t, \qquad \mathrm{d}y = \mathrm{d}t \\ x &= x(t) = x(y) \\ \mathrm{d}s &= \sqrt{\mathrm{d}_y x^2 + 1}\, \mathrm{d}y \end{aligned}$$

$$\int_C f(x,y)\, \mathrm{d}s = \int_{y_a}^{y_b} f(x(y), y)\, \sqrt{1 + \mathrm{d}_y x^2}\, \mathrm{d}y$$

Beispiel: Masse eines inhomogenen dünnen Drahtes



Der Draht ist zu einer Sinuskurve verbogen, das heißt, die Parametrisierung ist

$$x = \sin y \qquad ; \quad y \in [0, 2\pi],$$

die Massendichte des Drahtes sei

$$\varrho(x,y) = \alpha \sqrt{1 + \cos^2 y}$$

und der Querschnitt sei

$$A = \text{const.}$$

- für einen homogenen Draht wäre die Masse

$$m = \varrho V = \varrho A \ell$$

  mit der Gesamtlänge ℓ des Drahtes.
- für den inhomogenen Draht gilt

$$\begin{aligned} m &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \varrho_i A \Delta s_i \\ &= A \int_C \varrho(x,y)\, \mathrm{d}s \end{aligned}$$

Zur Rückführung auf ein herkömmliches Integral kann man entweder x und y durch $x(s)$ und $y(s)$ ersetzen, d.h. die Bogenlänge s ist als Kurvenparameter nötig, oder man ersetzt $\mathrm{d}s$ mittels $\mathrm{d}x$ oder $\mathrm{d}y$. Im Allgemeinen wird also auf eine neue Variable transformiert. Hier wird y als Parameter benutzt.

Für den Polygonabschnitt gilt

$$\begin{aligned} & \Delta s_i^2 &=& \Delta x_i^2 + \Delta y_i^2 \\ \curvearrowright \quad & \mathrm{d}s^2 &=& \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 \\ & & & \mathrm{d}x = \cos y \, \mathrm{d}y \\ & & & \mathrm{d}x^2 = \cos^2 y \, \mathrm{d}y^2 \\ \curvearrowright \quad & \mathrm{d}s^2 &=& \left(1 + \cos^2 y\right) \, \mathrm{d}y^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \curvearrowright \quad m &= A \int_0^{2\pi} \alpha \sqrt{1 + \cos^2 y} \sqrt{1 + \cos^2 y} \, \mathrm{d}y \\ &= A\alpha \int_0^{2\pi} \left(1 + \cos^2 y\right) \, \mathrm{d}y \\ &= A\alpha \left(2\pi + \int_0^{2\pi} \cos^2 y \, \mathrm{d}y \right) \qquad \left| \cos^2 y = \frac{1}{2}\left(1 + \cos 2y\right) \right. \\ &= A\alpha \left(2\pi + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(1 + \cos 2y\right) \, \mathrm{d}y \right) \\ &= A\alpha \left(2\pi + \frac{1}{2} 2\pi + 0 \right) \\ m &= A\alpha 3\pi \end{aligned}$$

Zur Berechnung der Kurvenlänge ℓ wird die Funktion $f(x, y)$ im Integral Eins gesetzt.

$$\ell = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \Delta s_i = \int_C \mathrm{d}s \tag{1.48}$$

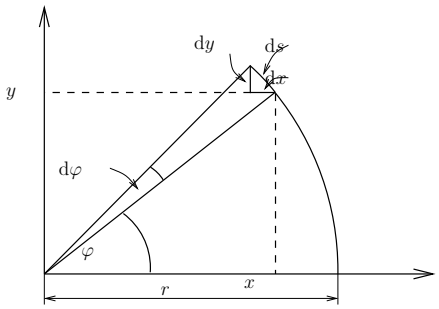
Beispiel: Kreisumfang

Die Parametrisierung des Kreises erfolgt durch Polarkoordinaten mit dem Winkel φ als Kurvenparameter und einem konstanten Abstand r vom Ursprung.

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi & \qquad r &= \text{const} \\ y &= r \sin \varphi & \qquad \varphi &\in [0, 2\pi) \end{aligned}$$

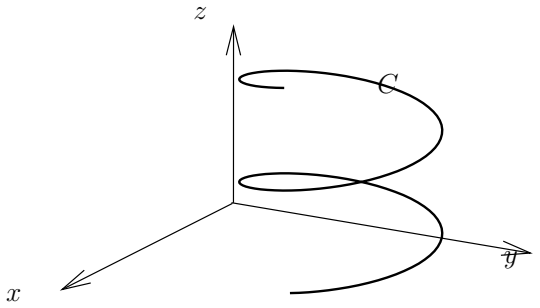
Das Differential $\mathrm{d}s$ wird durch $\mathrm{d}\varphi$ ersetzt.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}s^2 &= \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 \\
&\mathrm{d}x = -r\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi \\
&\mathrm{d}y = r\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi \\
\mathrm{d}s^2 &= r^2\left(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi\right)\,\mathrm{d}\varphi^2 = r^2\,\mathrm{d}\varphi^2 \\
\mathrm{d}s &= r\,\mathrm{d}\varphi
\end{aligned}
$$



$$
\curvearrowright \qquad \ell = \int_0^{2\pi} r\,\mathrm{d}\varphi = 2\pi r
$$

Verallgemeinert auf den $\mathbb{R}^3$ benötigt man für die Berechnung eines Kurvenintegrals einer Funktion $f(x,y,z)$ entlang einer Kurve C die Parametrisierung mit dem Kurvenparameter t.



$$
x(t), \qquad y(t) \qquad \text{und} \qquad z(t) \tag{1.49}
$$

Das Differential $\mathrm{d}s$ schreibt sich mit $\mathrm{d}_t x \equiv \dot{x}$, $\mathrm{d}_t y \equiv \dot{y}$ und $\mathrm{d}_t z \equiv \dot{z}$ in der Form

$$
\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2 = \left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right)\mathrm{d}t^2 \tag{1.50}
$$

und das Integral berechnet sich zu

$$
\int_C f(x,y,z)\,\mathrm{d}s = \int_{t_a}^{t_e} f(x(t),y(t),z(t))\,\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}\,\mathrm{d}t. \tag{1.51}
$$

Bemerkung: Das Kurvenintegral im $\mathbb{R}^n$ berechnet sich völlig analog.

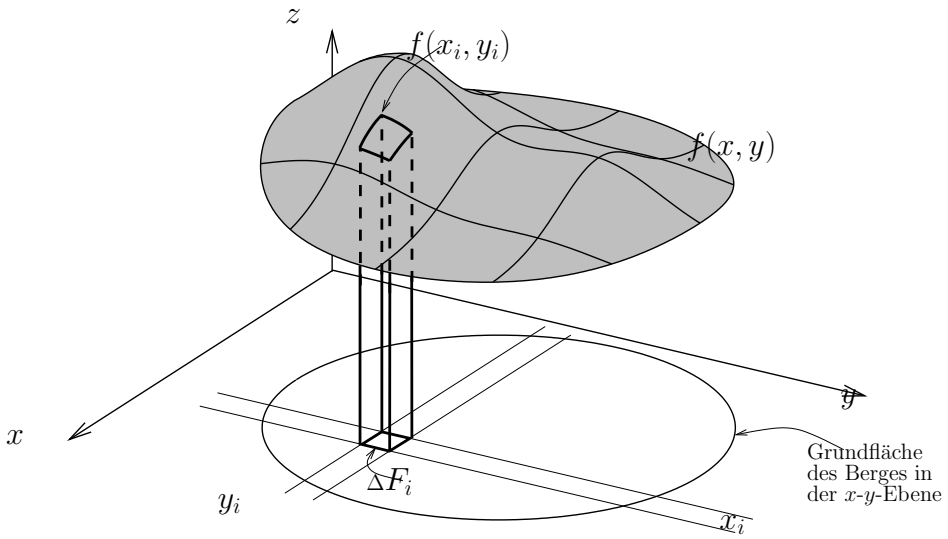
2.3 Flächenintegral

Zur beispielsweisen Berechnung des Volumens eines Berges, der durch die Funktion $z = f(x,y)$ gegeben ist, wird die Grundfläche in kleine Flächenelemente $\Delta F_i = \Delta x_i \cdot \Delta y_i$ zerlegt. Das Teilvolumen über dem Flächenelement ΔF_i ist näherungsweise

$$
\Delta V_i \approx f(x_i, y_i)\Delta F_i. \tag{1.52}
$$

Aufsummiert über alle Flächenelemente innerhalb der Grundfläche ergibt sich näherungsweise das Volumen des Berges zu

$$
V \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta F_i \tag{1.53}
$$



und im Grenzfall infinitisimal kleiner Flächenelemente ergibt sich das exakte Volumen des Berges zu

$$V = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) \triangle F_i = \int_F f(x, y)\, \mathrm{d}F. \tag{1.54}$$

Das Integral einer Funktion $f(x, y)$ über eine Fläche F ist also definiert als

$$\int_F f(x, y)\, \mathrm{d}F = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) \triangle F_i. \tag{1.55}$$

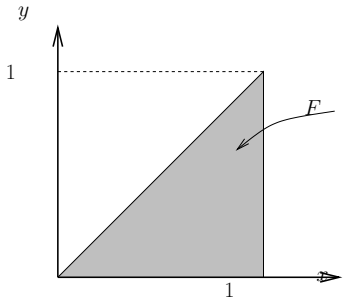
Das Differential $\mathrm{d}F$ kann in kartesischen Koordinaten durch $\mathrm{d}x$ und $\mathrm{d}y$ dargestellt werden.

$$\mathrm{d}F = \mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}y \tag{1.56}$$

$$\curvearrowright \qquad \int_F f(x, y)\, \mathrm{d}F = \iint_F f(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \tag{1.57}$$

Beispiel: Die Masse eines dünnen Bleches in der Form eines Dreiecks mit inhomogener Flächendichte $\varrho(x, y)$ sei zu berechnen.

$$\begin{aligned} F &= \{(x, y) \quad | \quad 0 \le x \le 1, 0 \le y \le x\} \\ &= \{(x, y) \quad | \quad 0 \le y \le 1, y \le x \le 1\} \\ f(x, y) &= (1 - x)(1 - y) = \varrho(x, y) \\ &\quad \text{Flächendichte} \end{aligned}$$



$$
\begin{aligned}
m &= \int_F f \, \mathrm{d}F \\
&= \int_0^1 \int_y^1 (x-1)(y-1) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y
\end{aligned}
$$

oder

$$
= \int_0^1 \int_0^x (x-1)(y-1) \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x
$$

Somit ergibt sich

$$
\begin{aligned}
m &= \int_0^1 \int_y^1 (1 - x - y + xy) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 \left[x - \frac{x^2}{2} - yx + y\frac{x^2}{2} \right]_y^1 \, \mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{2} - y + \frac{y}{2} - y + \frac{y^2}{2} + y^2 - \frac{y^3}{2} \right) \, \mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}y + \frac{3}{2}y^2 - \frac{1}{2}y^3 \right) \, \mathrm{d}y \\
&= \left[\frac{1}{2}y - \frac{3}{4}y^2 + \frac{1}{2}y^3 - \frac{1}{8}y^4 \right]_0^1 \\
&= \frac{1}{2} - \frac{3}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} \\
&= 1/8
\end{aligned}
$$

oder

$$\begin{aligned}
m &= \int_0^1 \int_0^x (1 - x - y + xy)\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \left[y - xy - \frac{y^2}{2} + x\frac{y^2}{2} \right]_0^x \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \left(x - x^2 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} \right) \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \left(x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{x^3}{2} \right) \mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}x^3 + \frac{x^4}{8} \right]_0^1 \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{8} \\
&= 1/8
\end{aligned}$$

Der Flächeninhalt der Fläche F kann berechnet werden, wenn formal $f \equiv 1$ gesetzt wird.

$$\curvearrowright \qquad F = \int_F \mathrm{d}F = \int_F \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \tag{1.58}$$

Meist ist es sinnvoll, die Integration nicht in kartesischen sondern in besser geeigneten Koordinaten durchzuführen. Die Variablen- oder Koordinatentransformation geschieht in Analogie zur Parametrisierung wie in Kapitel I.2.2. Die eindimensionale Kurve C war gegeben durch einen Parameter t

$$C = \{(x, y) \quad | \quad x = x(t), y = y(t), t \in [a, b]\}$$

und ds wurde ersetzt vermöge dt. Im $\mathbb{R}^2$ wird die Fläche F nun durch zwei Parameter, z.B. u und v, parametrisiert.

$$F = \{(x, y) \quad | \quad x = x(u, v), y = (u, v), u \in [a, b], v \in [c, d]\} \tag{1.59}$$

Beispiel: Kreisfläche

$$\begin{aligned}
x &= u\, \cos v & u &\in [0, R] \\
y &= u\, \sin v & v &\in [0, 2\pi]
\end{aligned}$$

Mit dem Abstand vom Ursprung u und dem Winkel v.

Im Allgemeinen gilt jedoch d$F \neq$ du dv. Als eine Skalenfunktion tritt die Jacobi-Funktionaldeterminante

$$J = \det \begin{pmatrix} \partial_u x & \partial_v x \\ \partial_u y & \partial_v y \end{pmatrix}. \tag{1.60}$$

auf. Die Kurzschreibweise für J ist

$$J = \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| \quad . \tag{1.61}$$

Dann gilt

$$\mathrm{d}F = |J| \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v. \tag{1.62}$$

Die Gleichung (1.62) ergibt sich als Spezialfall der im nächsten Abschnitt abgeleiteten Gleichungen (1.68) bis (1.72). Ein unabhängiger und für krummlinige Koordinaten in beliebiger Dimension gültiger Beweis erfolgt zudem in Abschnitt 5.3.

Das Flächenintegral ist in Parameterdarstellung schließlich über

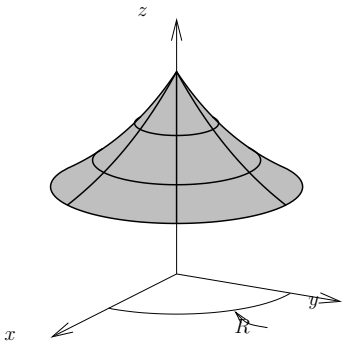
$$\int\limits_F f(x,y) \, \mathrm{d}F = \int\limits_F f(x(u,v), y(u,v)) \, |J| \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v \tag{1.63}$$

zu berechnen.

Beispiel: Volumen eines Zirkuszeltes

Die Grundfläche F sein ein Kreis mit Radius R. Das Zeltdach besitzt eine Höhe von der Form

$$z = f(x,y) = e^{-\sqrt{x^2+y^2}}$$



Wir parametrisieren F mit u und v über

$$\begin{aligned} F &= \{(x,y) \quad | \quad x = u \, \cos v, y = u \, \sin v, \\ &\qquad u \in [0,R], v \in [0,2\pi)\} \\ f &= e^{-u} \end{aligned}$$

Die Berechnung des Integrals in kartesischen Koordinaten

$$V = \int\limits_F f \mathrm{d}F = \iint_F f(x,y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

ist hier erwartungsgemäß ungeeignet. In Polarkoordinaten ist das Volumen jedoch leicht zu berechnen. Es gilt

$$V = \iint_F e^{-u} \, J \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v$$

mit

$$\begin{aligned} J &= \begin{vmatrix} \cos v & -u \, \sin v \\ \sin v & u \, \cos v \end{vmatrix} \\ &= u \, \cos^2 v + u \, \sin^2 v = u. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \curvearrowright \qquad V &= \iint_F e^{-u}\, u \,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u \\ &= \int_0^R e^{-u}\, u \int_0^{2\pi} \mathrm{d}v\,\mathrm{d}u \\ &= 2\pi \int_0^R e^{-u}\, u \,\mathrm{d}u \\ &= 2\pi \left(1 - (R+1)e^{-R}\right) \end{aligned}$$

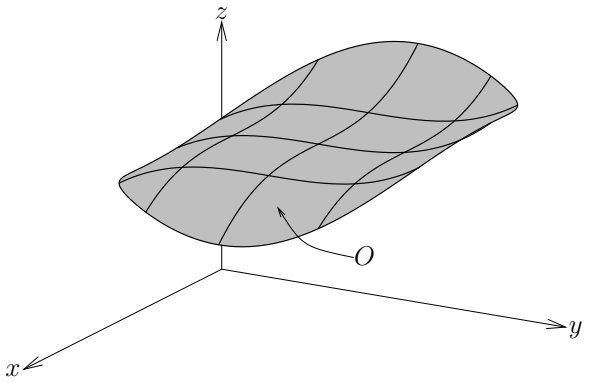
Bemerkung: Die im ersten Beispiel dieses Abschnitts benutzte dreieckige Integrationsfläche lässt sich natürlich auch parametrisieren. Geeignet ist z. B.

$$x(u,v) = u \quad , \quad y(u,v) = u\,v$$

mit $u \in [0;1]$ und $v \in [0;1]$. Die Jacobi-Determinante ergibt sich zu $J = u$. Der Leser möge prüfen, dass das u-v-Integral den Wert $1/8$ ergibt.

2.4 Oberflächenintegral

Die Fläche F sei nun nicht mehr die x-y-Ebene sondern eine beliebige Fläche im $\mathbb{R}^3$. Zur Unterscheidung vom Sachverhalt in Kapitel I.2.3 wird die Fläche jetzt mit O bezeichnet. Auf O ist eine Funktion $f(x,y,z)$ definiert, über die integriert wird.



Beispiel: O ist ein dünnes gebogenes Blech mit der Dicke d und der inhomogenen Dichte $f(x,y,z)$

Wieder wird die Fläche O in kleine Flächenelemente ΔO_i zerlegt und der Grenzwert der Zerlegungsumme über die Massenelemente

$$m_i = f(x_i, y_i, z_i) \cdot \Delta O_i \cdot d$$

gebildet:

$$m = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} m_i = d \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\, \Delta O_i.$$

Das Oberflächenintegral ist definiert als

$$\int_O f(x,y,z)\,\mathrm{d}O = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\, \Delta O_i \tag{1.64}$$

Zur Berechnung des Integrals muß die Fläche O durch eine Parameterdarstellung gegeben sein.

$$O = \{(x,y,z) \quad | \quad x = x(u,v), y = y(u,v), z = z(u,v), \\ u \in [a,b], v \in [c,d]\} \tag{1.65}$$

Beispiel: Parametrisierung der Oberfläche einer Kugel mit dem Radius R

Die Parametrisierung ist:

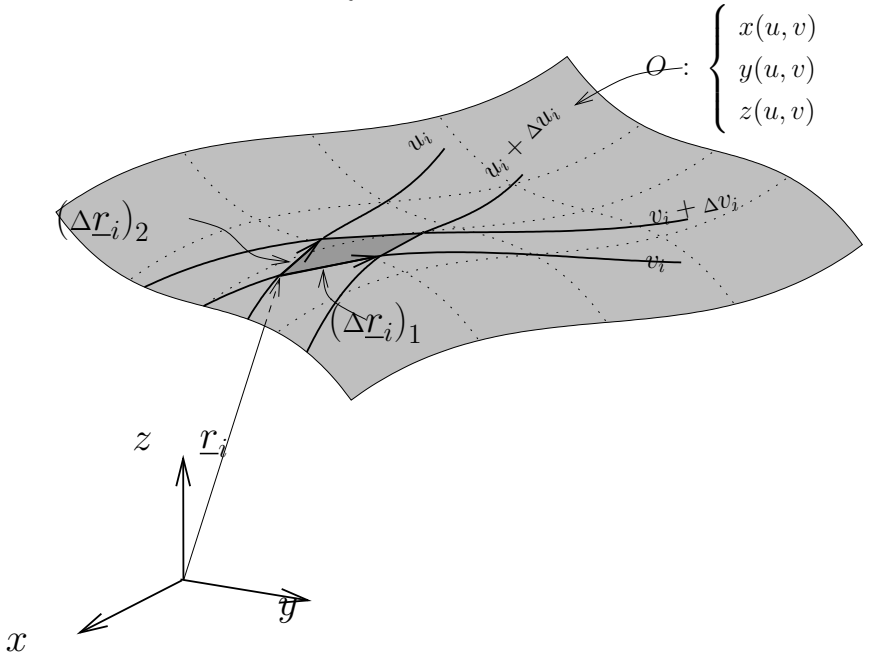
$$\begin{aligned} x &= R \sin u \cos v \\ y &= R \sin u \sin v \\ z &= R \cos u \end{aligned}$$

mit

$$u \in [0,\pi] \quad \text{und} \qquad v \in [0,2\pi),$$

und der Abstand vom Ursprung soll R betragen.

$$\begin{aligned} |(x,y,z)| &= \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ &= \sqrt{R^2 \sin^2 u \cos^2 v + R^2 \sin^2 u \sin^2 v + R^2 \cos^2 u} \\ &= R \end{aligned}$$



Das Flächenelement ΔO_i am Ort $\underline{r}_i \in O$ ist ein Parallelogramm mit den Seitenkanten beschrieben durch die Vektoren $(\Delta \underline{r}_i)_1$ und $(\Delta \underline{r}_i)_2$, die von $\underline{r}_i$ entlang der Linien mit konstantem u bzw v zeigen. Für infinitesimale Parallelogramme gehen diese Vektoren über in

$$\begin{aligned} (\Delta \underline{r}_i)_1 &= \frac{(\Delta \underline{r}_i)_1}{\Delta u_i} \, \Delta u_i \quad \longrightarrow \quad \partial_u \underline{r} \cdot \mathrm{d}u \\ (\Delta \underline{r}_i)_2 &= \frac{(\Delta \underline{r}_i)_2}{\Delta v_i} \, \Delta v_i \quad \longrightarrow \quad \partial_v \underline{r} \cdot \mathrm{d}v. \end{aligned} \tag{1.66}$$

Der Flächeninhalt eines solchen Parallelogramms ist

$$\Delta O_i = |(\Delta \underline{r}_i)_1 \times (\Delta \underline{r}_i)_2| \tag{1.67}$$

und für das Flächendifferential gilt dann

$$\mathrm{d}O = |\partial_u \underline{r} \times \partial_v \underline{r}| \ \mathrm{d}u \ \mathrm{d}v. \tag{1.68}$$

Im Detail ist das Kreuzprodukt

$$\partial_u \underline{r} \times \partial_v \underline{r} = \begin{vmatrix} \underline{e}_1 & \underline{e}_2 & \underline{e}_3 \\ \partial_u x & \partial_u y & \partial_u z \\ \partial_v x & \partial_v y & \partial_v z \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_u y \cdot \partial_v z - \partial_u z \cdot \partial_v y \\ \partial_u z \cdot \partial_v x - \partial_u x \cdot \partial_v z \\ \partial_u x \cdot \partial_v y - \partial_u y \cdot \partial_v x \end{pmatrix} \tag{1.69}$$

$$\curvearrowright \quad |\partial_u \underline{r} \times \partial_v \underline{r}| = \\ = \sqrt{(\partial_u y \cdot \partial_v z - \partial_u z \cdot \partial_v y)^2 + (\partial_u z \cdot \partial_v x - \partial_u x \cdot \partial_v z)^2 + (\partial_u x \cdot \partial_v y - \partial_u y \cdot \partial_v x)^2} \tag{1.70}$$

und mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned} E(u,v) &= (\partial_u \underline{r})^2 = (\partial_u x)^2 + (\partial_u y)^2 + (\partial_u z)^2 \\ F(u,v) &= \partial_u \underline{r} \cdot \partial_v \underline{r} = \partial_u x \cdot \partial_v x + \partial_u y \cdot \partial_v y + \partial_u z \cdot \partial_v z \\ G(u,v) &= (\partial_v \underline{r})^2 = (\partial_v x)^2 + (\partial_v y)^2 + (\partial_v z)^2 \end{aligned} \tag{1.71}$$

$$\curvearrowright \qquad |\partial_u \underline{r} \times \partial_v \underline{r}| = \sqrt{E \cdot G - F^2}. \tag{1.72}$$

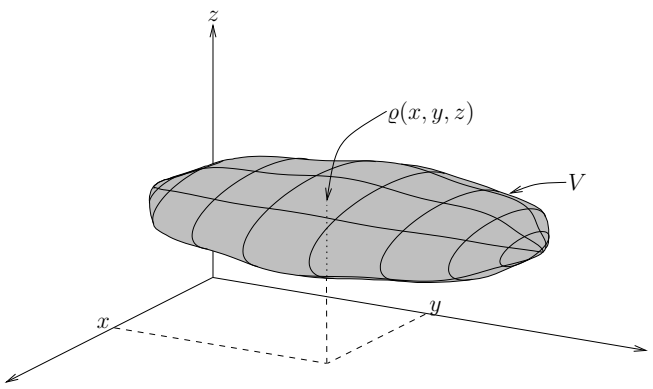
Damit ist das Integral über die Funktion f entlang der Fläche O

$$\int_O f(x,y,z) \ \mathrm{d}O = \iint_O f(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \cdot \sqrt{EG - F^2} \ \mathrm{d}u \ \mathrm{d}v. \tag{1.73}$$

2.5 Volumenintegral

Bei der Berechnung der Masse eines Körpers aus inhomogenen Material mit der Dichte $\varrho(x,y,z)$ und dem Volumen $V \subset \mathbb{R}^3$ wird das Volumen in kleine Volumenelemente $\Delta V_i = \Delta x_i \ \Delta y_i \ \Delta z_i$ zerlegt. Die Teilmasse des Körpers im Element ΔV_i ist näherungsweise

$$\Delta m_i \approx \varrho(x_i, y_i, z_i) \cdot \Delta V_i \tag{1.74}$$



und die des gesamten Körpers

$$m \approx \sum_{i=1}^{n} \varrho(x_i, y_i, z_i) \cdot \Delta V_i. \tag{1.75}$$

Die exakte Masse erhält man durch Grenzwertbildung

$$m = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \varrho(x_i, y_i, z_i)\ \Delta V_i = \int_V \varrho(x, y, z)\ \mathrm{d}V \tag{1.76}$$

Das Volumenintegral ist also definiert durch

$$\int_V f(x, y, z)\ \mathrm{d}V = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\ \Delta V_i, \tag{1.77}$$

wobei das Differential in kartesischen Koordinaten

$$\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z \tag{1.78}$$

und das Volumenintegral ein Dreifachintegral ist:

$$\int_V f(x, y, z)\ \mathrm{d}V = \iiint_V f(x, y, z)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z \tag{1.79}$$

Das Volumen kann berechnet werden, indem man die Funktion $f \equiv 1$ setzt.

$$V = \int_V \mathrm{d}V = \iiint_V \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z \tag{1.80}$$

Die Wahl der Parametrisierung ist nicht auf kartesische Koordinaten beschränkt, sondern kann beliebig sein:

$$\begin{aligned} V = \{(x, y, z) \quad | \quad & x = x(u, v, w), y = y(u, v, w), z = z(u, v, w), \\ & u \in [a, b], v \in [c, d], w \in [e, f]\} \end{aligned} \tag{1.81}$$

Beispiel: Parametrisierung einer Kugel mit Radius R

$$\begin{array}{rcl@{\qquad\qquad}rcl} x &=& u \cdot \sin v \cdot \cos w & u &\in& [0, R] \\ y &=& u \cdot \sin v \cdot \sin w & v &\in& [0, \pi] \\ z &=& u \cdot \cos v & w &\in& [0, 2\pi) \end{array}$$

Das Differential $\mathrm{d}V$ ist analog zum Flächendifferential $\mathrm{d}F$ (1.61)

$$\mathrm{d}V = J\ \mathrm{d}u\ \mathrm{d}v\ \mathrm{d}w \tag{1.82}$$

mit der Jacobi-Funktionaldeterminante

$$J = \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| = \det \begin{pmatrix} \partial_u x & \partial_v x & \partial_w x \\ \partial_u y & \partial_v y & \partial_w y \\ \partial_u z & \partial_v z & \partial_w z \end{pmatrix} \tag{1.83}$$

Diese Relation wird ebenso in Abschnitt 5.3 abgeleitet. Falls sich für J ein negativer Wert ergibt, ist J durch $|J|$ zu ersetzen, da das Volumen immer positiv gezählt werden soll.

Beispiel: Volumen der oben parametrisierten Kugel

$$J = \begin{vmatrix} \sin v\ \cos w & u\ \cos v\ \cos w & -u\ \sin v\ \cos w \\ \sin v\ \sin w & u\ \cos v\ \sin w & u\ \sin v\ \sin w \\ \cos v & -u\ \sin v & 0 \end{vmatrix} = u^2 \sin v$$

$$\curvearrowright \qquad \mathrm{d}V = \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z = u^2 \sin v\ \mathrm{d}u\ \mathrm{d}v\ \mathrm{d}w$$

oder durch Umbenennung

$$u = r, \quad v = \vartheta, \quad w = \varphi$$
$$\mathrm{d}V = r^2 \sin\vartheta\ \mathrm{d}r\ \mathrm{d}\vartheta\ \mathrm{d}\varphi$$

Das Volumen der Kugel K ist daher

$$\int_V \mathrm{d}V = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{R} r^2 \sin\vartheta\ \mathrm{d}r\ \mathrm{d}\vartheta\ \mathrm{d}\varphi = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Kapitel 2

Differentiation und Integration im Komplexen

1 Komplexe Zahlen

Da in den reellen Zahlen gewisse Operationen nicht abgeschlossen sind, so besitzt zum Beispiel

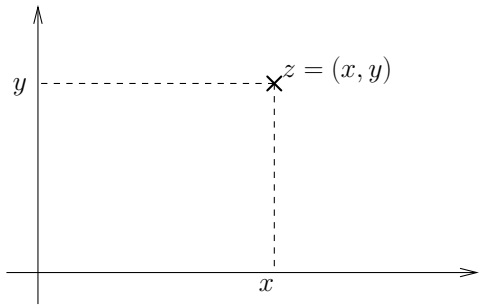
$$x^2 + 1 = 0$$

für $x \in \mathbb{R}$ keine Lösung, ist es sinnvoll den Zahlenbereich zu erweitern auf die komplexen Zahlen $z \in \mathbb{C}$.

Eine Möglichkeit der Definition ist ein Paar von reellen Zahlen

$$z = (x, y). \tag{2.1}$$

Ein solches Paar läßt sich darstellen in der Gaußs-Zahlenebene.



Es werden Operationen auf der Menge dieser Zahlen definiert.

$$+ \quad : \qquad z_1 + z_2 = (x_1 + x_2,\ y_1 + y_2) \tag{2.2}$$

$$\cdot \quad : \qquad z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2,\ x_1 y_2 + x_2 y_1) \tag{2.3}$$

usf.

Für das obige Beispiel $z^2 + 1 = 0$ existieren für $z \in \mathbb{C}$ die beiden Lösungen

$$\begin{aligned} z_1 &= (0, 1) \\ z_2 &= (0, -1) \end{aligned}$$

denn:

$$\begin{aligned} z_1 &: \quad (0,1) \cdot (0,1) = (0 - 1, 0) = -1 \\ z_2 &: \quad (0,-1) \cdot (0,-1) = (0 - 1, 0) = -1. \end{aligned}$$

Da der Umgang mit Zahlenpaaren unhandlich ist, wird die imaginäre Einheit i eingeführt, definiert durch $i^2 = -1$, was zur äquivalenten algebraischen Darstellung

$$z = x + iy \tag{2.4}$$

führt.

Bei analoger Anwendung der Regeln aus dem Reellen folgen äquivalente Regeln zur Paardarstellung.

- $$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) \\ &= (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) \end{aligned} \tag{2.5}$$

- $$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) \\ &= (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1) \end{aligned} \tag{2.6}$$

- $$\frac{1}{z} = \frac{1}{x + iy} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{z^*}{|z|^2} \tag{2.7}$$

mit der komplex konjugierten Zahl

- $$z^* = (x + iy)^* = x - iy \tag{2.8}$$

und dem Betrag

- $$|z| = \sqrt{z \cdot z^*} = \sqrt{x^2 + y^2}. \tag{2.9}$$

Für die Wurzel einer komplexen Zahl gilt

- $$\sqrt{z} = \sqrt{x + iy} \stackrel{!}{=} a + ib. \tag{2.10}$$

Nach Quadrieren und Koeffizientenvergleich folgt das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 &= x \\ 2ab &= y, \end{aligned}$$

woraus die beiden möglichen Ergebnisse folgen:

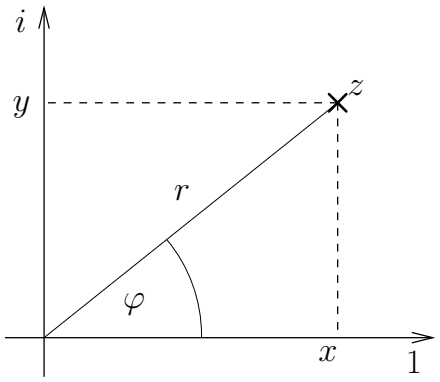
$$a_{1/2} = \pm\sqrt{\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + y^2}}, \qquad b_{1/2} = \frac{y}{2a_{1/2}} \tag{2.11}$$

Neben der algebraischen Darstellung gibt es die trigonometrische Darstellung durch den Winkel und den Abstand vom Ursprung in der Gauß-Ebene.

$$z = x + iy = r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi) \tag{2.12}$$

Gleichheit zweier komplexer Zahlen gilt, wenn

$$\begin{aligned} z_1 = z_2 \quad \curvearrowright \quad & r_1 = r_2 \\ & \varphi_1 = \varphi_2 + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \tag{2.13}$$



Die Multiplikation zweier komplexer Zahlen entspricht einer Multiplikation der Abstände und einer Addition der Winkel, denn

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1 \cdot r_2 \{ \quad (\cos\varphi_1 \ \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \ \sin\varphi_2) \\ &\qquad + i\,(\cos\varphi_1 \ \sin\varphi_2 + \sin\varphi_1 \ \cos\varphi_2)\} \\ z_1 \cdot z_2 &= r_1 \cdot r_2 \,\{\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\}. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Der Kehrwert und damit auch die Division entspricht dem Kehrwert des Abstands und dem negativen Winkel, denn

$$\begin{aligned} \frac{1}{z} &= \frac{1}{r}\,\frac{1}{\cos\varphi + i\sin\varphi} \\ &= \frac{1}{r}\,\frac{\cos\varphi - i\sin\varphi}{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi} \\ &= \frac{1}{r}\,(\cos\varphi - i\sin\varphi) \\ \frac{1}{z} &= \frac{1}{r}\,\{\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)\}\,. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Potenzen einer komplexen Zahlen sind durch die Moivre-Formel zu berechnen

$$z^n = r^n\,(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)\,, \tag{2.16}$$

die aus der Multiplikationsregel und Induktion folgt.

Durch die Euler-Formel

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi, \tag{2.17}$$

die durch Einsetzen und Vergleich der Taylorreihen bewiesen werden kann, wird aus der trigonometrischen Darstellung, Gleichung (2.12), die Exponentialdarstellung

$$z = r\,e^{i\varphi}. \tag{2.18}$$

Die Multiplikation ergibt dann

$$z_1 \cdot z_2 = r_1\,e^{i\varphi_1} \cdot r_2\,e^{i\varphi_2} = r_1 r_2\,e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} \tag{2.19}$$

und das Potenzieren in der Exponentialdarstellung führt auf

$$z^n = \left(r\,e^{i\varphi}\right)^n = r^n\,e^{in\varphi}. \tag{2.20}$$

Beim Ratizieren oder Wurzelziehen sucht die man komplexen Zahlen w, die die Gleichung

$$\sqrt[n]{z} = w \stackrel{!}{=} \varrho\, e^{i\psi} \tag{2.21}$$

erfüllen. Wir finden ϱ und ψ durch Potenzieren vermöge

$$\begin{aligned} r &= \varrho^n \\ \varphi + 2\pi k &= n\psi \qquad \text{mit} \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

zu

$$\begin{aligned} \varrho &= \sqrt[n]{r} \\ \psi &= \frac{1}{n}\varphi + 2\pi\frac{k}{n} \end{aligned} \tag{2.22}$$

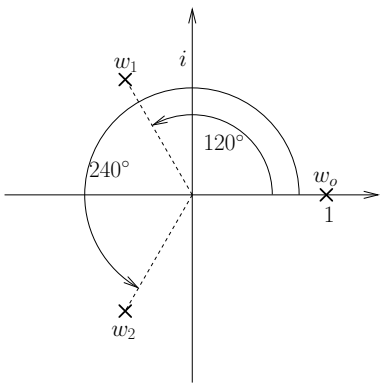
Lassen wir k durch die ganzen Zahlen laufen, so folgt

$$\begin{aligned}
&k = 0: && w_o = \sqrt[n]{r}\, e^{i\varphi/n} && \\
&k = 1: && w_1 = \sqrt[n]{r}\, e^{i(\varphi/n + 2\pi/n)} && \\
&k = 2: && w_2 = \sqrt[n]{r}\, e^{i(\varphi/n + \pi/n)} && \\
&\ \vdots && && \\
&k = n-1: && w_{n-1} = \sqrt[n]{r}\, e^{i(\varphi/n + 2\pi(n-1)/n)} && \\
&k = n: && w_n = \sqrt[n]{r}\, e^{i(\varphi/n + 2\pi)} && = w_o \\
&k = n+1: && w_{n+1} = \ldots && = w_1 \\
&\text{usw.} && && \\
&k = -1 && w_{-1} = \ldots && = w_{n-1}
\end{aligned}$$

Die n Wurzeln $w_o, w_1, \ldots w_{n-1}$ sind daher echt verschieden.

Beispiel:

$$\sqrt[3]{1} = \begin{cases} e^{i0} & = 1 \\ e^{i2\pi/3} & = \cos\frac{2}{3}\pi + i\,\sin\frac{2}{3}\pi \\ e^{i4\pi/3} & = \cos\frac{4}{3}\pi + i\,\sin\frac{4}{3}\pi \end{cases}$$



Eine beliebte Quizfrage ist die nach der Lösung von i^i.

$$\begin{aligned} i^i &= e^{\ln(i^i)} = e^{i\ \ln i} \\ & \\ & \text{mit} \qquad i = e^{i\pi/2 + i\ 2\pi\ k} \qquad k \in \mathbb{Z} \\ & \text{und} \quad \ln i = i\frac{\pi}{2} + i\ 2\pi\ k \\ & \\ \curvearrowright \quad i^i &= \exp\left\{ i\ \left(i\frac{\pi}{2} + i\ 2\pi\ k \right) \right\} = e^{-\pi/2 - 2\pi\ k} \end{aligned} \tag{2.23}$$

"Die schönste Gleichung der Mathematik" ist (laut einer Umfrage unter Mathematikern)

$$e^{i\pi} + 1 = 0 \quad . \tag{2.24}$$

Was ist so besonders an dieser Gleichung?

2 Komplexe Funktionen

Die trigonometrischen Funktionen ergeben sich aus der Euler-Formel (2.17).

$$\begin{aligned} e^{ix} &= \cos x + i\ \sin x \\ e^{-ix} &= \cos x - i\ \sin x \end{aligned}$$

$$\cos x = \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right) \tag{2.25}$$

$$\sin x = \frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right) \tag{2.26}$$

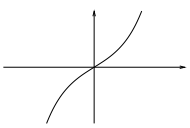
Alle Additionstheoreme sind daraus einfach ableitbar.

Beispiel:

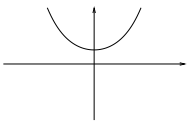
$$\begin{aligned} \cos(\alpha+\beta) &= \frac{1}{2}\left\{ e^{i(\alpha+\beta)} + e^{-i(\alpha+\beta)} \right\} \\ &= \frac{1}{2}\left\{ e^{i(\alpha+\beta)} + e^{i(\alpha-\beta)} - e^{i(\alpha-\beta)} + e^{-i(\alpha+\beta)} \right\} \\ &= e^{i\alpha}\frac{e^{i\beta} + e^{-i\beta}}{2} - e^{-i\beta}\frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2} \\ &= (\cos\alpha + i\ \sin\alpha)\cos\beta - i\,(\cos\beta - i\ \sin\beta)\sin\alpha \\ \cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\ \cos\beta - \sin\alpha\ \sin\beta \end{aligned}$$

Die Hyperbel-Funktionen sind analog zu den trigonometrischen Funktionen definiert.

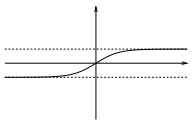
$$\sinh x = \tfrac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right)$$



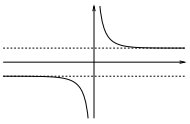
$\cosh x = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)$



$\tanh x = \frac{\left(e^x + e^{-x}\right)}{\left(e^x - e^{-x}\right)}$



$\coth x = 1/\tanh x$



Die trigonometrischen und Hyperbel-Funktionen gehen durch die Ersetzung $x \to ix$ ineinander über.

$$\begin{aligned} \sinh ix &= i\ \sin x \\ \cosh ix &= \cos x \\ \tanh ix &= i\ \tan x \\ \coth ix &= \frac{1}{i}\cot x \end{aligned}$$

Der Logarithmus einer Zahl z sei w.

$$w = \ln z$$

Da die komplexe Zahl z durch unendlich viele Winkel in der Exponentialdarstellung repräsentiert wird

$$z = r\ e^{i(\varphi + 2\pi k)} \qquad \text{mit} \quad k \in \mathbb{Z},$$

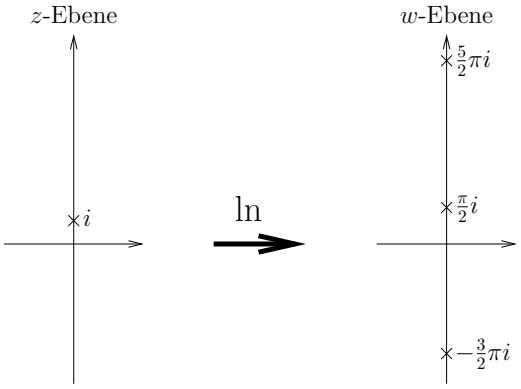
gibt es auch unendlich viele Lösungen für w:

$$\begin{aligned} w = \ln z &= \ln\left(r\ e^{i(\varphi+2\pi k)}\right) \\ &= \ln r + i\varphi + i2\pi k \end{aligned} \tag{2.27}$$

Beispiel: $z = i, \qquad w = \ln z = ?$

$$i = e^{i\pi/2} = e^{i(\pi/2 + 2\pi k)}$$

$$\begin{aligned} w = \ln i &= \underbrace{\ln 1}_{=0} + i\frac{\pi}{2} + i2\pi k \\ &= i\frac{\pi}{2} + i2\pi k \end{aligned}$$

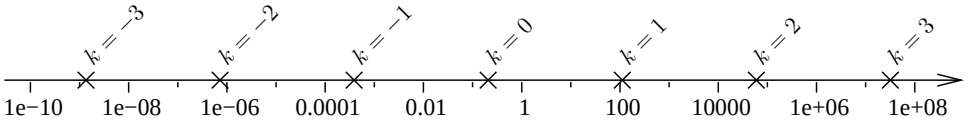


Ebenso wie der Logarithmus besitzt auch die Gleichung

$$i^i = w$$

von Seite 43 unendlich viele verschiedenen Lösungen.

$$\begin{aligned} i^i &= e^{i(i\pi/2+i2\pi k)} \\ &= e^{-\pi/2-2\pi k} \qquad \text{mit} \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$



Bemerkung: Riemann-Blätter

Die Mehrdeutigkeit von $w = \ln z$ und anderen Funktionen verursacht Probleme mit dem mathematischen Funktionsbegriff, denn Funktionen sind eindeutige Abbildungen. Damit wäre $\ln z$, da mehrdeutig, keine Funktion. Durch die Auffächerung der z-Ebene in Riemann-Blätter kann der Funktionsbegriff gerettet werden. Jedem k-Wert bei Mehrdeutigkeiten entspricht ein Riemann-Blatt der Gauß-z-Ebene. Durch die Zuordnung eines z-Wertes auf einem Riemann-Blatt zu genau einem w-Wert wird die Eindeutigkeit garantiert.

3 Differentiation

Die Definitionen und Regeln der Differentiation aus dem Reellen sind übertragbar auf die komplexen Zahlen.

Eine Funktion $f(z)$ heißt analytisch auf dem Gebiet $A \in \mathbb{C}^1$ wenn $f(z)$ in jedem Punkt aus A differenzierbar ist. Das Gebiet A ist das Analytizitätsgebiet. Synonyme für "analytisch" sind "regulär analytisch" oder "holomorph".

Häufig sind Funktionen $f(z)$ in weiten Teilen von $\mathbb{C}^1$ analytisch bis auf einige Punkte, welche singuläre Punkte oder Singularitäten heißen. Prototyp einer Singularität ist der Pol:

$$f(z) = \frac{1}{z - z_o}. \tag{2.28}$$

Diese Funktion hat eine Polstelle bei $z = z_o$, ist aber im Gebiet $A = \mathbb{C}^1 \setminus \{z | z = z_o\}$ analytisch.

Wenn eine Funktion $f(z)$, nach Zerlegung von $f(z)$ und z in die reellen Einzelteile

$$\begin{aligned} z &= x + iy \\ f(z) &= u + iv = u(x,y) + iv(x,y), \end{aligned}$$

die Cauchy-Riemann-Relationen

$$\partial_x u = \partial_y v, \qquad \partial_x v = -\partial_y u \tag{2.29}$$

erfüllt, ist dies äquivalent zur Analytizität der Funktion $f(z)$.

Beweis:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}_z f &= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} \\ &= \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{u(x+\Delta x, y+\Delta y) + iv(x+\Delta x, y+\Delta y) - u(x,y) - iv(x,y)}{\Delta x + i\Delta y} \\ &= \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \left\{ \frac{u(x+\Delta x, y+\Delta y) - u(x,y)}{\Delta x + i\Delta y} + i \frac{v(x+\Delta x, y+\Delta y) - v(x,y)}{\Delta x + i\Delta y} \right\} \end{aligned}$$

Der Grenzübergang muß völlig beliebig erfolgen können:

$$\begin{aligned} (a) \qquad &= \lim_{\Delta x \to 0} \lim_{\Delta y \to 0} \left\{ \frac{u(x+\Delta x, y+\Delta y) - u(x,y)}{\Delta x + i\Delta y} + i \frac{v(x+\Delta x, y+\Delta y) - v(x,y)}{\Delta x + i\Delta y} \right\} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \left\{ \frac{u(x+\Delta x, y) - u(x,y)}{\Delta x} + i \frac{v(x+\Delta x, y) - v(x,y)}{\Delta x} \right\} \\ &= \partial_x u + i \partial_x v \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (b) \qquad &= \lim_{\Delta y \to 0} \lim_{\Delta x \to 0} \left\{ \frac{u(x+\Delta x, y+\Delta y) - u(x,y)}{\Delta x + i\Delta y} + i \frac{v(x+\Delta x, y+\Delta y) - v(x,y)}{\Delta x + i\Delta y} \right\} \\ &= \lim_{\Delta y \to 0} \left\{ \frac{u(x, y+\Delta y) - u(x,y)}{i\Delta y} + i \frac{v(x, y+\Delta y) - v(x,y)}{i\Delta y} \right\} \\ &= \frac{1}{i} \partial_y u + \partial_y v \end{aligned}$$

Aus dem Vergleich der Real- und Imaginärteile folgen die Cauchy-Riemann-Relationen

$$\partial_x u = \partial_y v, \qquad \partial_x v = -\partial_y u$$

Die Abbildung f überführt z in $f(z)$ beziehungsweise (x,y) in (u,v). Für analytische Funktionen erfolgt die Überführung aber korreliert für x und y, so daß auch eine Korrelation zwischen u und v vorhanden sein muß. Diese ist gerade durch die Cauchy-Riemann-Relationen gegeben.

Beispiel: Ist die Funktion $f(z) = z^*$ analytisch?

$$u + iv = (x+iy)^* = x - iy$$

$$\curvearrowright \qquad \begin{aligned} u(x,y) &= x \\ v(x,y) &= -y \end{aligned}$$

Die Cauchy-Riemann-Relationen sind dann

$$\begin{array}{cc} \partial_x u \neq \partial_y v & \partial_x v = -\partial_y u \\ 1 \neq -1 & 0 = 0 \end{array}$$

nicht erfüllt und damit ist $f(z)$ nicht analytisch.
Die Ableitung $\mathrm{d}_z\,(z^*)$ führt also zu unterschiedlichen Werten je nachdem auf welchem Weg der Grenzübergang ausgeführt wird.

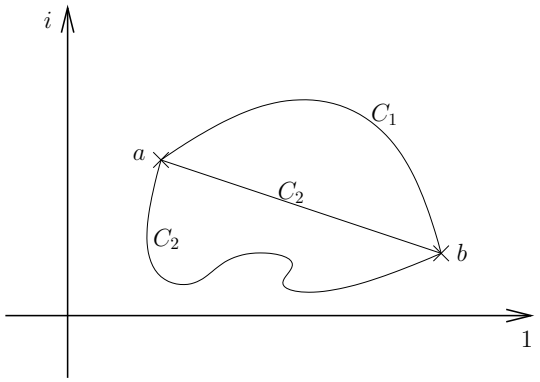
$$\begin{aligned} & \lim_{\Delta z\to 0} \frac{(z+\Delta z)^* - z^*}{\Delta z} = \lim_{\Delta z\to 0} \frac{\Delta z^*}{\Delta z} = \lim_{\substack{\Delta x\to 0 \\ \Delta y\to 0}} \frac{\Delta x - i\Delta y}{\Delta x + i\Delta y} \\ (a) \qquad & = \lim_{\Delta x\to 0} \lim_{\Delta y\to 0} \frac{\Delta x - i\Delta y}{\Delta x + i\Delta y} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1 \\ (b) \qquad & = \lim_{\Delta y\to 0} \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta x - i\Delta y}{\Delta x + i\Delta y} = \lim_{\Delta y\to 0} -\frac{\Delta y}{\Delta y} = -1 \\ (c) \qquad & = \lim_{\Delta x=\Delta y\to 0} \frac{\Delta x - i\Delta y}{\Delta x + i\Delta y} = \frac{1-i}{1+i} = -i \\ \vdots \qquad & \end{aligned}$$

4 Integration

Formal wird zuerst der Integralbegriff aus dem Reellen übertragen:

$$\int_a^b f(z)\,\mathrm{d}z \qquad \text{wobei jetzt} \quad a, b, z \in \mathbb{Z}. \tag{2.30}$$

Nicht klar ist dabei, auf welchem Weg die Integration erfolgt. Dadurch ergibt sich eine Ähnlichkeit zum Linienintegral.



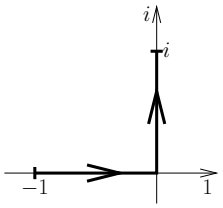
Beispiel: Die Rolle des Weges für $f(z) = z^2$, $a = -1$ und $b = i$

- Bei Ignorierung des Weges und Anwendung der Integrationsregeln des $\mathbb{R}^1$ ergibt sich

$$\int_{-1}^{i} z^2\,\mathrm{d}z = \frac{1}{3}z^3\Big|_{-1}^{i} = \frac{1}{3}\left(i^3 - (-1)^3\right) = \frac{1-i}{3}$$

- Für den Weg entlang der Koordinatenachsen ergibt sich

C :



$z = iy$ mit $0 \le iy \le i$, $\mathrm{d}z = \mathrm{d}\,(iy)$

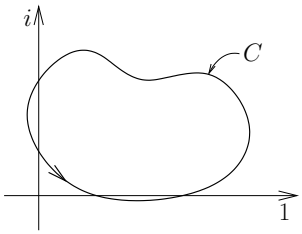
$z = x$ mit $-1 \le x \le 0$, $\mathrm{d}z = \mathrm{d}x$

$$\begin{aligned}\int\limits_C z^2\,\mathrm{d}z &= \int\limits_{-1}^{0} x^2\,\mathrm{d}x + \int\limits_0^i (iy)^2\;\mathrm{d}\,(iy)\\ &= \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{0} + \frac{(iy)^3}{3}\Big|_0^i = \frac{1}{3} + \frac{i^3}{3} = \frac{1-i}{3}\end{aligned}$$

Dieses Beispiel schürt den Verdacht, daß der Weg keine Rolle spielt. Der Integralsatz von Cauchy wird zeigen, daß dies unter bestimmten Bedingungen tatsächlich der Fall ist.

4.1 Integralsatz von Cauchy

Für den Integralsatz von Cauchy, dem zentralen Satz der komplexen Integration, betrachtet man einen geschlossenen Weg C.



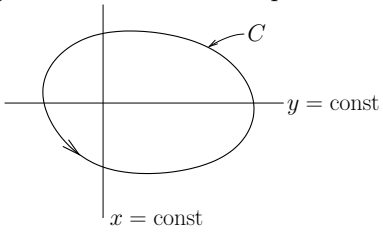
einfach zusammenhängendes Gebiet A

Wenn $f(z)$ auf C und im eingeschlossenen Gebiet A analytisch ist, so gilt

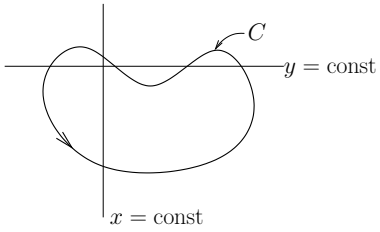
$$\oint\limits_C f(z)\,\mathrm{d}z = 0 \tag{2.31}$$

Beweis:

1. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei das Gebiet A so beschaffen, daß Schnitte von C mit $x = \text{const}$ oder $y = \text{const}$ jeweils nur zwei Schnittpunkte mit C besitzen, also

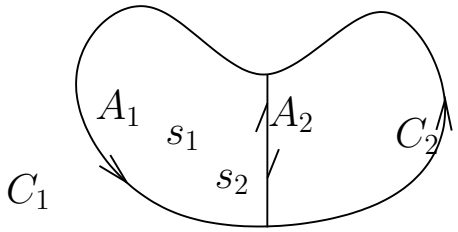


und nicht,



da sich hier vier Schnittpunkte zwischen der $y = \text{const}$ Linie und C ergeben.

Falls A komplizierter beschaffen ist, etwa von der zuletzt gezeigten Form, ist A zu zerlegen, so daß nur Teilgebiete von der zuerst gezeigten Form entstehen.



Dann gilt

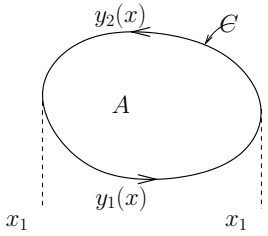
$$\begin{aligned} \oint_C &= \int_{C_1} + \int_{s_1} + \int_{s_2} + \int_{C_2}, \qquad \text{da} \quad \int_{s_1} + \int_{s_2} = 0 \\ &= \oint_{(A_1)} + \oint_{(A_2)} \end{aligned} \tag{2.32}$$

A_1 und A_2 erfüllen die Voraussetzungen und die Überlegungen sind getrennt auf A_1 und A_2 anzuwenden und dann wie oben beschrieben zusammenzufügen.

2. Das gesamte Integral wird in Real- und Imaginärteil zerlegt.

$$\begin{aligned} \oint_C f(z)\,\mathrm{d}z &= \oint_C (u + iv)\,(\mathrm{d}x + i\mathrm{d}y) \\ &= \oint_C u\,\mathrm{d}x - \oint_C v\,\mathrm{d}y + i\left\{\oint_C v\,\mathrm{d}x + \oint_C u\,\mathrm{d}y\right\} \end{aligned} \tag{2.33}$$

3. Untersuchung des ersten Terms $\oint_C u\,\mathrm{d}x$ liefert



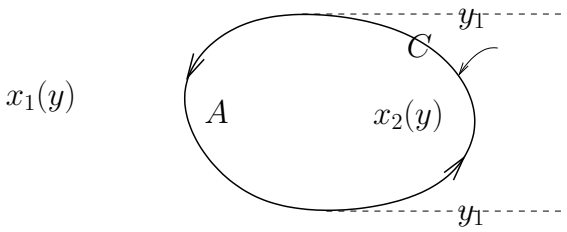
mit $\qquad y_1(x) \le y \le y_2(x), \qquad x$ Kurvenparameter

$$\begin{aligned}
\oint_C u\,\mathrm{d}x &= \int_{x_1}^{x_2} u(x, y_1(x))\,\mathrm{d}x + \int_{x_2}^{x_1} u(x, y_2(x))\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{x_1}^{x_2} \{u(x, y_1(x)) - u(x, y_2(x))\}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} (-\partial_y u)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\
&= \int_A (-\partial_y u)\,\mathrm{d}F. \qquad (2.34)
\end{aligned}$$

4. Analog gilt für den dritten Term $\oint_C v\,\mathrm{d}x$

$$\oint_C v\,\mathrm{d}x = \int_A (-\partial_y v)\,\mathrm{d}F. \qquad (2.35)$$

5. Untersuchung des zweiten Terms $\oint_C y\,\mathrm{d}y$ liefert



mit $\quad x_1(y) \le x \le x_2(y), \qquad y$ Kurvenparameter

$$\begin{aligned}
\oint_C v\,\mathrm{d}y &= \int_{y_1}^{y_2} v(x_2(y), y)\,\mathrm{d}y + \int_{y_2}^{y_1} v(x_1(y), y)\,\mathrm{d}y \\
&= \int_{y_1}^{y_2} \{v(x_2(y), y) - v(x_1(y), y)\}\,\mathrm{d}y \\
&= \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} (\partial_x v)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \int_A (\partial_x v)\,\mathrm{d}F. \qquad (2.36)
\end{aligned}$$

6. Analog gilt für den vierten Term $\oint_C u\,\mathrm{d}y$

$$\oint_C u\,\mathrm{d}y = \int_A (\partial_x u)\,\mathrm{d}F. \qquad (2.37)$$

7. Alles zusammen ergibt

$$\begin{aligned}\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = & \int_A (-\partial_y u - \partial_x v)\;\mathrm{d}F \\ & + i\int_A (-\partial_y v + \partial_x u)\;\mathrm{d}F.\end{aligned} \tag{2.38}$$

8. Anwendung der Cauchy-Riemann-Relationen

$$\partial_x u = \partial_y v, \qquad \partial_y u = -\partial_x v$$

auf A ergibt

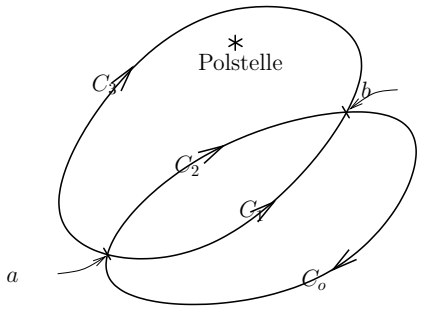
$$\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

q.e.d.

Aus dem Satz von Cauchy ergibt sich als Schlußfolgerung die Wegunabhängigkeit des Integrales

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z$$

solange bei Deformation des Weges C ausschließlich der Analytizitätsbereich überstrichen wird.



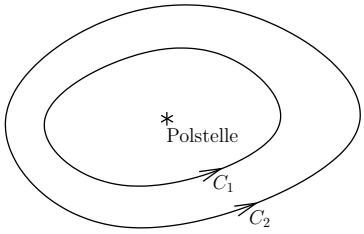
So gilt zum Beispiel

$$\int_{C_1} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{C_2} f(z)\,\mathrm{d}z = -\int_{C_o} f(z)\,\mathrm{d}z,$$

aber

$$\int_{C_1} f(z)\,\mathrm{d}z \neq \int_{C_3} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

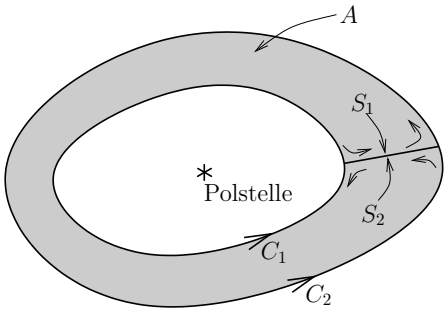
Ringintegrale um denselben Pol sind nicht Null



$$\oint_{C_1} f(z)\,\mathrm{d}z \neq 0,$$

aber gleich, solange der und nur der Pol im Inneren der Wege liegt

$$\oint_{C_1} f(z)\,\mathrm{d}z = \oint_{C_2} f(z)\,\mathrm{d}z.$$



Bei Verbindung der Wege zu einem Ringintegral, wobei der Pol außerhalb des Weges liegt, ist das Integral entlang diese Weges Null. Da die Verbindungswege bis auf die Richtung gleich sind, gilt

$$0 = \oint_{(A)} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{C_1} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{S_1} f(z)\,\mathrm{d}z + \underbrace{\int_{-C_2} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{S_2} f(z)\,\mathrm{d}z}_{=0},$$

wobei (A) der Rand der Fläche A ist.

4.2 Integralformel von Cauchy

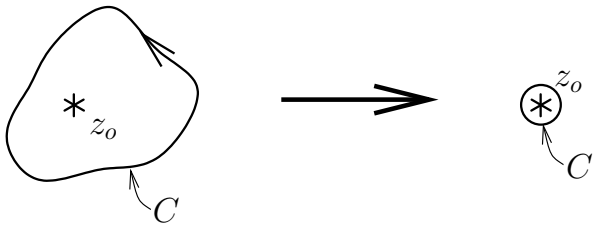
Für eine auf dem Gebiet A analytische Funktion $f(z)$ und einen einfach geschlossen Weg C in A gilt die Integralformel von Cauchy:

$$\oint_{C} \frac{f(z)}{z - z_o}\,\mathrm{d}z = 2\pi i\, f(z_o). \tag{2.39}$$

z_o liegt dabei innerhalb des von C eingeschlossenen Gebietes.

Beweis:

1. Die Funktion $\frac{f(z)}{z-z_o}$ hat einen Pol bei z_o.
2. Der Weg C kann ganz bis an z_o herangezogen werden, ohne daß der Wert des Integrals sich ändert, zum Beispiel zu einem Kreis mit Radius ε.



   Für $\varepsilon \to 0$ gilt dann

$$\oint_C \frac{f(z_o)}{z-z_o}\,\mathrm{d}z = f(z_o) \oint_C \frac{\mathrm{d}z}{z-z_o}.$$

3. Für den Kreis mit Radius ε um z_o gilt die Parametrisierung

$$C: \quad z(t) = z_o + \varepsilon e^{it} \qquad \text{mit} \quad t \in [0, 2\pi)$$

$$\curvearrowright \qquad \oint_C \frac{\mathrm{d}z}{z-z_o} = \int_0^{2\pi} \frac{\varepsilon i e^{it}}{\varepsilon e^{it}} = 2\pi i$$

q.e.d.

4.3 Residuensatz

Vorbereitend werden einige Begriffe definiert, die für den Residuensatz notwendig sind.

- **Pol erster Ordnung**
  Eine Funktion $g(z)$ hat bei z_j einen Pol 1. Ordnung, wenn sich $g(z)$ in der Umgebung von z_j darstellen läßt als

$$g(z) = \frac{R(z_j)}{z-z_j} + h(z), \tag{2.40}$$

  wobei $h(z)$ analytisch ist in z_j.

- **Pol n-ter Ordnung**
  Die Funktion $g(z)$ hat bei z_j einen Pol n-ter Ordnung, wenn sich $g(z)$ in der Umgebung von z_j darstellen läßt als

$$g(z) = \frac{Q_n(z_j)}{(z-z_j)^n} + h(z), \tag{2.41}$$

  mit einer wiederum analytischen Funktion $h(z)$.

- Die obigen Darstellungen können mitunter verborgen sein.

  Beispiele: 1.
  $$g(z) = \cot z \quad \text{besitzt bei } z = 0 \text{ einen Pol}$$
  $$\cot z = \frac{\cos z}{\sin z} \approx \frac{1}{z} \quad \curvearrowright \quad \text{Pol 1. Ordnung}$$
  2.
  $$g(z) = \coth^2 z = \frac{\cosh^2 z}{\sinh^2 z} \approx \frac{1}{z^2} \quad \curvearrowright \quad \text{Pol 2. Ordnung}$$

- Der Koeffizient $R(z_j)$ heißt **Residuum** der Funktion $g(z)$ bei z_j.

  Beispiele: 1.
  $$g(z) = \cot z \quad \curvearrowright \quad R(0) = 1$$
  2.
  $$g(z) = \coth^2 z \quad \curvearrowright \quad R(0) = 0$$

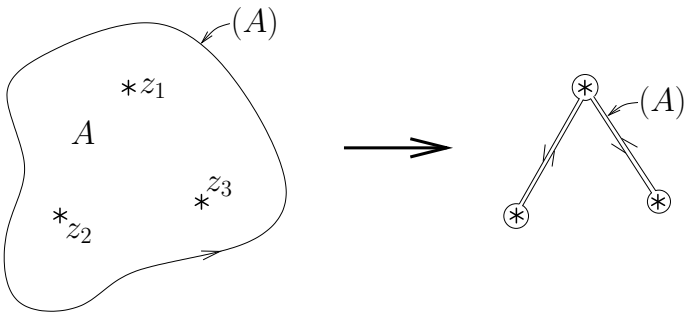
- Pole verschiedener Ordnung können überlagert sein.

  Beispiel:
  $$g(z) = \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2}$$

Residuensatz: Die Funktion $g(z)$ sei analytisch in A bis auf endlich viele isoliert Pole z_j (Singularitäten) und analytisch auf dem Rand (A) von A. Dann gilt

$$\oint_{(A)} g(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_j R(z_j). \tag{2.42}$$

Beweis:



1. Deformation von (A)
2. Aufheben der Integrale über gegenläufige Wege
3. Verschwinden des Integrals über $h(z)$
4. Verschwinden der Integrale entlang der Kreise um z_j bei:
$$\int_{\odot} \frac{Q_n(z_j)}{(z - z_j)^n}\,\mathrm{d}z = 0, \qquad \text{für} \quad n > 1$$

denn

$$\begin{aligned}\int\limits_{\odot} \frac{Q_n(z_j)}{(z-z_j)^n}\,\mathrm{d}z &= \int\limits_0^{2\pi} \frac{Q_n(z_j)}{(z_j+\varepsilon e^{i\varphi}-z_j)^n}\,\varepsilon i e^{i\varphi}\,\mathrm{d}\varphi \\ &= Q_n(z_j)\varepsilon^{1-n}\int\limits_0^{s\pi} e^{i(1-n)\varphi}\,\mathrm{d}\varphi \\ &= 0.\end{aligned}$$

5.
$$\int\limits_{\odot} \frac{R(z_j)}{z-z_j}\,\mathrm{d}z = R(z_j)\int\limits_{\odot}\frac{1}{z-z_j}\,\mathrm{d}z = R(z_j)\,2\pi i$$

q.e.d.

Zur Berechnung des Residuums einer allgemeinen Funktion $g(z)$ mit dem nicht offensichtlichen Pol 1. Ordnung gilt

$$R(z_j) = \lim_{z\to z_j}(z-z_j)g(z), \tag{2.43}$$

falls

$$\left|\lim_{z\to z_j}(z-z_j)g(z)\right| < \infty.$$

Dagegen sind für

$$\left|\lim_{z\to z_j}(z-z_j)g(z)\right| = \infty$$

bei z_j auch Pole höherer Ordnung vorhanden. In diesem Falle errechnet sich das Residuum durch

$$R(z_j) = \frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to z_j}\mathrm{d}_z^{n-1}\left\{(z-z_j)^n g(z)\right\}, \tag{2.44}$$

wobei n die maximale Ordnung der Pole bei z_j ist.

Beweis:

$$g(z) = \frac{R(z_j)}{z-z_j} + \frac{Q_2(z_j)}{(z-z_j)^2} + \cdots + \frac{Q_n(z_j)}{(z-z_j)^n} + h(z)$$

$$\curvearrowright \qquad (z-z_j)^n g(z) = (z-z_j)^{n-1}R(z_j) + (z-z_j)^{n-2}Q_2(z_j) + \cdots + Q_n(z_j) + (z-z_j)^n h(z)$$

$$\curvearrowright \mathrm{d}_z^{n-1}\left\{(z-z_j)^n g(z)\right\} = (n-1)!\,R(z_j) + 0 + \cdots + 0 + (z-z_j)\cdot(\text{analytischer Ausdruck})$$

Nach dem Grenzübergang $z \to z_j$ folgt die Gleichung (2.44).

Beispiel:

$$g(z) = \frac{a}{z} + \frac{b}{z^2}$$

$$R(z_j) = \mathrm{d}_z \left\{ z^2 g(z) \right\} = \mathrm{d}_z (az + b) = a$$

Weitere Beispiele siehe Handschrift.

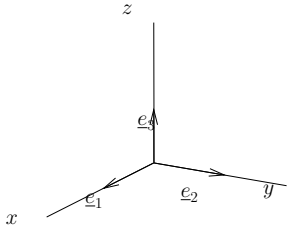
Kapitel 3

Differentiation und Integration von Vektorfeldern

1 Vektoren

- Zuerst möge sich der Leser an einige Begriffe aus der Linearen Algebra erinnern, die hier nur aufgezählt, aber nicht erläutert werden:
  - Vektoren sind Elemente eines Vektorraumes. Die Vektoren haben diverse Eigenschaften und verhalten sich nach bestimmten Regeln.
  - Addition zweier Vektoren.
  - Multiplikation mit Körperelementen, meist reellen oder komplexen Zahlen.
  - Linearität, Kommutativität.
  - Lineare Unabhängigkeit von Vektoren.
  - Basis des Vektorraumes, Basisvektoren.
  - Dimension des Vektorraumes.
  - Basiswechsel.
  - Orthogonalbasis (OGB), Orthonormalbasis (ONB).
  - Skalarprodukt zweier Vektoren.
  - Vektorprodukt (Krücke, die nur im 3-dim. Raum möglich ist).
- Prototyp eines Raumes für die klassische Physik ist der 3-dim. Anschauungsraum, der auch der Orts- und Konfigurationsraum genannt wird. In diesem Raum werden Vektoren im physikalisch engeren Sinne betrachtet. Allerdings ist dieser Raum nicht in jedem Falle mit dem Vektor-Raum identisch, in dem diese Vektoren leben. Auf die mathematisch exakte Abgrenzung des jeweiligen Vektor-Raumes werden wir hier verzichten. Trotzdem ist eine erfolgreiche Vektorrechnung möglich.

  Wir verwenden kartesische normierte Basisvektoren



Bezeichnungen:

$$\begin{array}{lllllll} \underline{e}_1 & \equiv & \underline{e}_x & \equiv & \underline{i} & \equiv & \vec{e}_1 \quad \dots \\ \underline{e}_2 & \equiv & \underline{e}_y & \equiv & \underline{j} & \equiv & \vec{e}_2 \quad \dots \\ \underline{e}_3 & \equiv & \underline{e}_z & \equiv & \underline{k} & \equiv & \vec{e}_3 \quad \dots \end{array} \tag{3.1}$$

Manchmal werden Vektoren auch durch fettgedruckte Buchstaben dargestellt.

Die $\{\underline{e}_a, a = 1, \dots, 3\}$ bilden eine ONB. So gilt:

$$\underbrace{\underline{e}_a \underline{e}_b}_{Skalarprodukt} = \underbrace{\delta_{ab}}_{Kronecker-Symbol} = \begin{cases} 1 & a = b \\ 0 & a \neq b \end{cases}$$

Andere Schreibweisen für das Skalarprodukt sind z.B.

$$(\underline{e}_a, \underline{e}_b), \langle \underline{e}_a | \underline{e}_b \rangle, \underline{e}_a \cdot \underline{e}_b$$

Ein Vektor ist im physikalisch engeren Sinn eine gerichtete Größe in diesem Raum.

Z.B. wird der Ort eines Teilchens durch einen Vektor $\underline{r}$ dargestellt:

$$\underline{r} = x\underline{e}_1 + y\underline{e}_2 + z\underline{e}_3 \tag{3.2}$$

Durch Umbenennung der Koordinaten

$$\begin{array}{lllll} x & \longrightarrow & x_1 & \longrightarrow & x^1 \\ y & \longrightarrow & x_2 & \longrightarrow & x^2 \\ z & \longrightarrow & x_3 & \longrightarrow & x^3 \end{array}$$

kann man auch schreiben:

$$\underline{r} = x^1\underline{e}_1 + x^2\underline{e}_2 + x^3\underline{e}_3 = \sum_{a=1}^{3} x^a \underline{e}_a = \sum_a x^a \underline{e}_a. \tag{3.3}$$

x^a können auch Funktionen sein. Markiert $\underline{r}$ den Ort eines bewegten Teilchens, so gilt: $x^a(t)$ mit t als Parameter (etwa die Zeit)

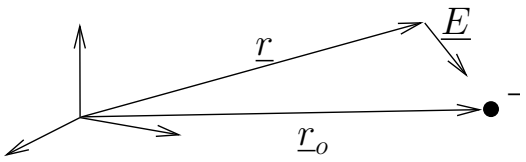
$$\curvearrowright \underline{r}(t) = \sum_a x^a(t)\underline{e}_a. \tag{3.4}$$

$\underline{r}(t)$ beschreibt eine Kurve im Raum, die Bahnkurve oder Trajektorie des Teilchens. Diese Bahn verändert sich nicht mit t, nur die Position des Teilchen auf der Bahnkurve ändert sich.

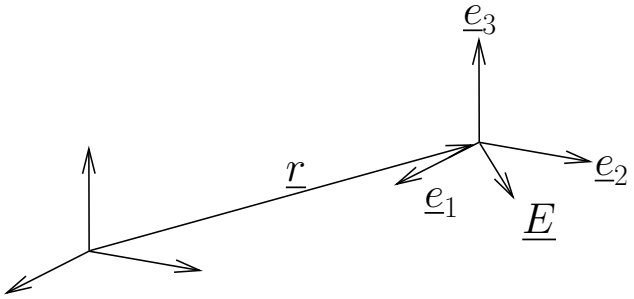
Wenn man „immer“ genau diese Basis verwendet, kann man sie auch weglassen und die Vektoren nur durch ihre Komponenten markieren und als 3-Tupel schreiben:

$$\underline{r}(t) = \begin{pmatrix} x^1(t) \\ x^2(t) \\ x^3(t) \end{pmatrix} \hat{=} \text{3-Tupel} \tag{3.5}$$

Zur weiteren Erläuterung der Bedeutung von Vektoren und Basen in der Physik betrachten wir im folgenden ein geladenes Teilchen, z.B. ein Elektron. Das Elektron erzeugt ein elektrisches Feld. Das elektrische Feld ist eine vektorielle Größe und wird durch $\underline{E}$ dargestellt. Das Elektron befinde sich nun am Ort $\underline{r}_0$, das elektrische Feld bildet sich dann in der Umgebung von $\underline{r}_0$ aus, z.B. bei $\underline{r}$.



Zur quantitativen Darstellung von $\underline{E}$ kann auch die kartesische Basis verwendet werden. Die Basis wird dazu vom Ursprung nach $\underline{r}$ verschoben. Das ist möglich, da die kartesische Basis in jedem Punkt des Raumes gleich ist.



Für $\underline{E}$ ergibt sich dann:

$$\underline{E} = E^1\underline{e}_1 + E^2\underline{e}_2 + E^3\underline{e}_3 = \sum_a E^a\underline{e}_a \tag{3.6}$$

Für die Komponenten von $\underline{E}$ werden hochgestellte Indizes verwendet. $\{E^a\}$ sind in den Raumpunkten verschieden, hängen also von $\underline{r}$ ab:

$$E^a = E^a(\underline{r}) \equiv E^a(x^1, x^2, x^3) \equiv E^a(x^b) \tag{3.7}$$

Ebenso kann man auch schreiben

$$\underline{E}(\underline{r}) = \sum_a E^a(\underline{r})\underline{e}_a \tag{3.8}$$

Man bezeichnet $\underline{E}(\underline{r})$ als Vektorfeld.

Wir betrachten nun eine Elektron, das sich zusätzlich bewegt, $\underline{r}_0$ hängt also von t ab: $\underline{r}_0(t)$. Dadurch wird auch $\underline{E}$ an einem festen Beobachtungspunkt $\underline{r}$ zeitabhängig.

$$\underline{E}(\underline{r}, t) = \sum_a E^a(\underline{r}, t)\underline{e}_a \equiv \sum_a E^a(x^b, t)\underline{e}_a \tag{3.9}$$

- Als Empfehlung für die Zukunft: Mit einem Vektor sollten weniger die 3 Komponenten x^1, x^2, x^3 oder E^1, E^2, E^3 assoziiert werden, sondern mehr die Kombination aus Betrag und Richtung des Vektors.

2 Differentiation von Vektoren

Wir legen im folgenden fest, daß die kartesische ONB $\{\underline{e}_a\}$ Basis des Raumes sei.

Nach welchen Variablen ist eine Differentiation naheliegend? Dazu betrachten wir zwei physikalische Größen.

1. $\underline{r}(t)$ beschreibe die Trajektorie eines Teilchens. $\mathrm{d}_t\underline{r}$ beschreibt dann die Änderung des Ortes $\underline{r}$ des Teilchens mit der Zeit. Die Definition des Differentialquotienten erfolgt analog zu einer

skalaren Funktion:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}_t\underline{r} &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\underline{r}(t+\Delta t)-\underline{r}(t)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\sum_a x^a(t+\Delta t)\underline{e}_a - \sum_a x^a(t)\underline{e}_a}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\sum_a \{x^a(t+\Delta t)-x^a(t)\}}{\Delta t}\underline{e}_a \\ &= \sum_a \left\{\lim_{\Delta t\to 0}\frac{x^a(t+\Delta t)-x^a(t)}{\Delta t}\right\}\underline{e}_a \\ \mathrm{d}_t\underline{r} &= \sum_a \mathrm{d}_t x^a \underline{e}_a \end{aligned} \tag{3.10}$$

Man kann auch schreiben:

$$\mathrm{d}_t\underline{r} = \begin{pmatrix} \mathrm{d}_t x^1 \\ \mathrm{d}_t x^2 \\ \mathrm{d}_t x^3 \end{pmatrix} \tag{3.11}$$

Wir interpretieren $\mathrm{d}_t\underline{r}$ jetzt als Geschwindigkeit des Massenpunktes:

$$\underline{v}(t) = \mathrm{d}_t\underline{r}(t) \tag{3.12}$$

Analog lassen sich auch die höheren Ableitungen definieren. Die Beschleunigung eines Massenpunktes ist dann:

$$\mathrm{d}_t\underline{v} = \mathrm{d}_t{}^2\underline{r} = \underline{a} \tag{3.13}$$

Es wird hierbei ebenso komponentenweise differenziert.

2. $\underline{E}(\underline{r})$ beschreibe das elektrische Feld eines bei $\underline{r}_0$ ruhenden Elektrons:

$$\underline{E} = \sum_a E^a(x^1,x^2,x^3)\underline{e}_a \tag{3.14}$$

Formal ist es möglich, das Feld $\underline{E}(\underline{r})$, ebenfalls komponentenweise, nach dem Ort $\underline{r}$ zu differenzieren.

$$\partial_{x^b}\underline{E} = \sum_a \partial_{x^b}E^a\underline{e}_a \tag{3.15}$$

Wir versuchen nun $\partial_{x^b}E^a$ physikalisch zu interpretieren, stellen aber fest, dass nur bestimmte Kombinationen der räumlichen Ableitungen eine universelle, physikalisch-technische Bedeutung haben.

2.1 Gradient

Wir betrachten eine skalare Funktion f im $\mathbb{R}^3$: $f \mid \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^1$.
Mögliche Schreibweisen sind:

$$\begin{gathered} f(x,y,z) \quad \text{oder} \\ f(\underline{r}) \quad \text{oder} \\ f(x^1,x^2,x^3) \quad \text{oder} \\ f(x^a) \end{gathered} \tag{3.16}$$

Physikalisch Beispiele für skalare Funktionen sind:

$T(x^a)$	Temperaturfeld
$\rho(x^a)$	Dichtefeld
$V(x^a)$	Potentialfeld

Wir definieren jetzt den Gradienten $\partial_{\underline{r}}\, f$ eines Skalarfeldes f:

$$\begin{aligned} \partial_{\underline{r}}\, f &\equiv \partial_{x^1} f \underline{e}_1 + \partial_{x^2} f \underline{e}_2 + \partial_{x^3} f \underline{e}_3 \\ &= \textstyle\sum_a \partial_{x^a} f \underline{e}_a \\ &= \begin{pmatrix} \partial_{x^1} f \\ \partial_{x^2} f \\ \partial_{x^3} f \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{3.17}$$

Weitere Bezeichnungen für den Gradienten sind:

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{r}} = \partial_{\underline{r}} f \equiv \nabla f \equiv \operatorname{grad} \mathrm{f} \tag{3.18}$$

wobei

$$\nabla \equiv \partial_{\underline{r}} \equiv \partial_{\underline{x}} \equiv \begin{pmatrix} \partial_{x^1} \\ \partial_{x^2} \\ \partial_{x^3} \end{pmatrix} \tag{3.19}$$

als Nabla-Operator bezeichnet wird.

Der Gradient einer skalaren Funtion f ist offenbar ein Vektor.

- Physikalische Interpretation und Bedeutung des Gradienten.

  $\partial_{\underline{r}}\, f$ zeigt die Richtung der stärksten Änderung von f an. Zur Erläuterung betrachten wir ein Temperaturfeld.

  1. Körper mit homogener Temperatur:

     $$T(x^1, x^2, x^3) = T(x^a) = T_0 = const$$

     $$\curvearrowright \partial_{\underline{r}}\, T = \underline{0}$$

  2. Körper mit Temperaturverteilung, zur Einfachheit 2-dimensional.

     $$T(x^1, x^2);$$

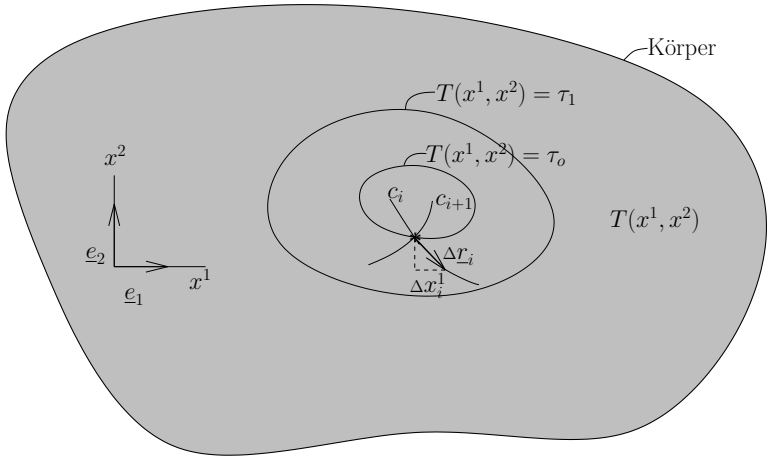
     Wir suchen jetzt die Isothermen, das sind Kurven auf denen die Temperatur konstant $(= \tau)$ ist.

     $$T(x^1, x^2) = \tau$$

     In diesem zweidimensionalen Fall entsprechen die Isothermen Kurven in der x^1-x^2-Ebene.

     - Wir betrachten Isotherme τ_0 an einem bestimmten Punkt $*$.
     - Wir legen alle möglichen Wege durch $*$:
       $c_i : \left\{x_i^1(t), x_i^2(t)\right\}$ Dabei ist t der jeweilige Kurvenparameter.
     - Auf welchem der Wege ändert sich die Temperatur am stärksten?
     - Wenn c_i parallel zur Isothermen verläuft ist dies sicher nicht die Richtung der größten Änderung! Hierbei ist die Änderung nämlich null.
     - Wir approximieren jetzt die Temperaturänderung $\triangle T$ in Umgebung von $*$ linear entlang eines Weges c_i.

       $$\triangle T(c_i) = T\left(x_*^1 + \triangle x_i^1, x_*^2 + \triangle x_i^2\right) - T\left(x_*^1, x_*^2\right) \tag{3.20}$$



Dabei sind $\Delta x_i^1, \Delta x_i^2$ die Komponenten des Weges entlang der Koordinatenlinien. Der erste Term auf der rechten Seite wird jetzt durch eine Taylorentwicklung ersetzt:

$$T\left(x_*^1 + \Delta x_i^1, x_*^2 + \Delta x_i^2\right) = T\left(x_*^1, x_*^2\right) + \partial_{x^1} T \cdot \Delta x_i^1 + \partial_{x^2} T \cdot \Delta x_i^2 \tag{3.21}$$

$$\curvearrowright \Delta T = \partial_{x^1} T \cdot \Delta x_i^1 + \partial_{x^2} T \cdot \Delta x_i^2$$

$$= \partial_{\underline{r}}\, T \cdot \Delta \underline{r}_i \tag{3.22}$$

Dabei ist

$$\Delta \underline{r}_i = \begin{pmatrix} \Delta x_i^1 \\ \Delta x_i^2 \end{pmatrix}$$

die Ortsänderung entlang des Weges c_i bei $*$.

– Es muss jetzt überprüft werden, in welche Richtung die Änderung maximal ist. Dazu werden verschiedene Wege mit dem gleichen Betrag der Ortsänderung $|\Delta \underline{r}_i| = \varepsilon$ betrachtet:

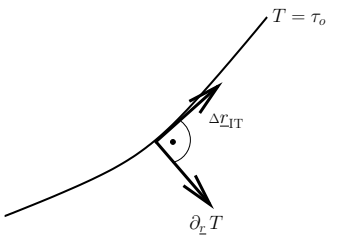
$$\Delta T = |\partial_{\underline{r}}\, T| \cdot |\Delta \underline{r}_i| \cdot \cos\phi_i = |\partial_{\underline{r}}\, T| \cdot \varepsilon \cos\phi_i$$

offensichtlich gilt

$$\Delta T = \text{ maximal für } \phi_i = 0, \text{ d.h. } \Delta \underline{r}_i \| \partial_{\underline{r}}\, T \tag{3.23}$$

– $\partial_{\underline{r}}\, T$ steht senkrecht auf den Isothermen, denn auf einer Isothermen gilt:

$$\begin{aligned} & \Delta T = 0 \quad \& \quad \Delta \underline{r}_i = \Delta \underline{r}_{IT} \\ \curvearrowright \quad & \Delta T = \partial_{\underline{r}}\, T \cdot \Delta \underline{r}_{IT} = 0 \\ \curvearrowright \quad & \partial_{\underline{r}}\, T \perp \Delta \underline{r}_{IT} \end{aligned} \tag{3.24}$$



– Wir verallgemeinern die Überlegung: Gradienten stehen senkrecht auf Isolinien.

2.2 Divergenz

Wir betrachten jetzt ein Vektorfeld

$$\underline{A}(\underline{r}) = \sum_a A^a(x^b)\underline{e}_a$$

wobei $\underline{e}_a$ die kartesiche ONB ist.

Die Divergenz des Vektorfeldes $\underline{A}$ ist dann definiert als:

$$\partial_{\underline{r}}\ \underline{A} = \partial_{x^1} A^1 + \partial_{x^2} A^2 + \partial_{x^3} A^3 = \sum_a \partial_{x^a} A^a \tag{3.25}$$

Verschiedene Bezeichnungen sind gebräuchlich:

$$\frac{\partial \underline{A}}{\partial \underline{r}} = \partial_{\underline{r}} \underline{A} = \nabla \cdot \underline{A} = \operatorname{div} \underline{\mathrm{A}}$$

$\partial_{\underline{r}}\ \underline{A}$ ist eine Skalare Größe.

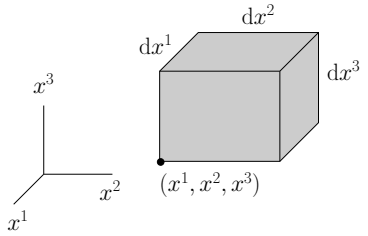
$\partial_{\underline{r}}\, \underline{A}$ kann als Skalarprodukt von $\partial_{\underline{r}}$ und $\underline{A}$ aufgefaßt werden.

- Physikalische Interpretation und Bedeutung der Divergenz

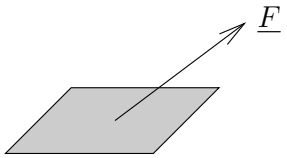
  $\underline{F}$ beschreibe die Strömung einer Flüssigkeit, $\underline{F}$ ist also der Massenfluß je Fläche und Zeit.

  $$[\underline{F}] = \frac{Kg}{m^2 s} \qquad = \text{Flußdichte}$$

  Wir berechnen den Durchsatz von Materie durch ein Volumenelement in allen drei Raumrichtungen. Die Flächen des Volumenelements stehen i.a. in einem gewissen Winkel zur Richtung

  von $\underline{F}$, z.B.

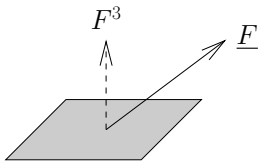
  

  Wirksam wird aber nur die Projektion von $\underline{F}$ senkrecht auf die Fläche, d.h. hier

  $$\underline{F} \cdot \underline{e}_3 = |\underline{F}| \cdot \cos(\underline{F}, \underline{e}_3) = \sum_a F^a \underline{e}_a \cdot \underline{e}_3 = F^3$$

  Der Durchsatz in $\underline{e}_1$-Richtung berechnet sich wie folgt:

  - Zufluß bei x^1; Eintrittsfläche $\mathrm{d}x^2\mathrm{d}x^3$
  - Abfluß bei $x^1 + \mathrm{d}x^1$; Austrittsfläche $\mathrm{d}x^2\mathrm{d}x^3$



– Nettofluß:

$$\begin{aligned}
&\underline{F}(x^1+\mathrm{d}x^1,x^2,x^3)\cdot\underline{e}_1\cdot\mathrm{d}x^2\mathrm{d}x^3-\underline{F}(x^1,x^2,x^3)\cdot\underline{e}_1\cdot\mathrm{d}x^2\mathrm{d}x^3\\
=&\left\{\underbrace{F^1(x^1+\mathrm{d}x^1,x^2,x^3)}_{F^1(x^1,x^2,x^3)+\partial_{x^1}F^1\cdot\mathrm{d}x^1}-F^1(x^1,x^2,x^3)\right\}\mathrm{d}x^2\mathrm{d}x^3\\
=&\partial_{x^1}F^1\mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^2\mathrm{d}x^3
\end{aligned}$$

Der Durchsatz in $\underline{e}_2$ und $\underline{e}_3$-Richtung ergibt sich analog:

$$\begin{aligned}
\underline{e}_2:&\quad \partial_{x^2}F^2\cdot\mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^2\mathrm{d}x^3\\
\underline{e}_3:&\quad \partial_{x^3}F^3\cdot\mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^2\mathrm{d}x^3
\end{aligned}$$

Der Nettofluß in allen 3 Raumrichtungen ist dann:

$$\left(\partial_{x^1}F^1+\partial_{x^2}F^2+\partial_{x^3}F^3\right)\underbrace{\mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^2\mathrm{d}x^3}_{\equiv\mathrm{d}V}=\partial_{\underline{r}}\,\underline{F}\cdot\mathrm{d}V \tag{3.26}$$

Somit ist $\partial_{\underline{r}}\,\underline{F}$ als Quellstärke von $\underline{F}$ im Punkt (x^1,x^2,x^3) interpretierbar.

Wenn keine Quellen oder Senken in $\mathrm{d}V$ liegen, muß der Nettofluß verschwinden. Alles was über die Oberfläche von $\mathrm{d}V$ zufließt, muß auch wieder über die Oberfläche von $\mathrm{d}V$ abfließen. Folglich ist dann $\partial_{\underline{r}}\,\underline{F}\overset{!}{=}0$. Man nennt $\underline{F}$ dann quellenfrei (senkenfrei) oder solenoidal.

Beispiele aus der Elektrodynamik:

$\partial_{\underline{r}}\,\underline{B} = 0$, d.h. das Magnetfeld $\underline{B}$ ist quellenfrei.

$\partial_{\underline{r}}\,\underline{D} = \rho$, d.h. die Ladungsdichte ρ ist die Quellstärke der dielektrischen Verschiebung $\underline{D}$.

2.3 Rotation

Wir betrachten wieder ein Vektorfeld

$$\underline{A}(\underline{r})=\sum_a A^a(x^b)\underline{e}_a$$

Die Rotation von $\underline{A}$ ist definiert als:

$$\begin{aligned}
\partial_{\underline{r}}\times\underline{A} \;\equiv\;& \left(\partial_{x^2}A^3-\partial_{x^3}A^2\right)\underline{e}_1\\
+\;& \left(\partial_{x^3}A^1-\partial_{x^1}A^3\right)\underline{e}_2\\
+\;& \left(\partial_{x^1}A^2-\partial_{x^2}A^1\right)\underline{e}_3
\end{aligned} \tag{3.27}$$

$\partial_{\underline{r}}\times\underline{A}$ ist wieder ein Vektor. Verschiedene Bezeichnungen sind gebräuchlich:

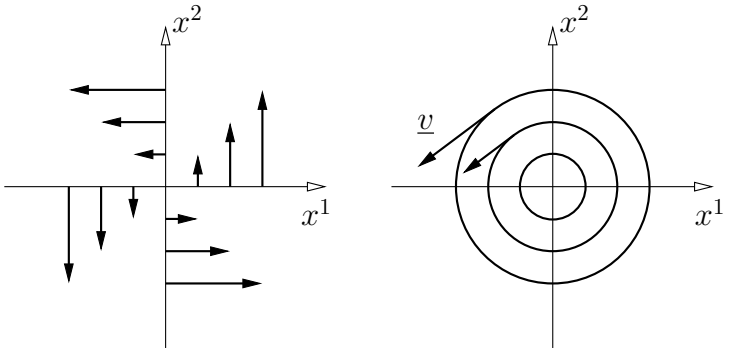
$$\partial_{\underline{r}}\times\underline{A}\equiv\mathrm{rot}\,\underline{\mathrm{A}}\equiv\nabla\times\underline{\mathrm{A}}\equiv\mathrm{curl}\,\underline{\mathrm{A}} \tag{3.28}$$

Dabei ist $\partial_{\underline{r}}\times\underline{A}$ als Vektorprodukt aus $\partial_{\underline{r}}$ und $\underline{A}$ aufzufassen.

- Physikalische Interpretation und Bedeutung der Rotation
  $\underline{v}$ sei das Strömungsfeld einer Flüssigkeit.

  Beispiele: 1.

$$\underline{v}(\underline{r}) = \begin{pmatrix} -\omega x^2 \\ \omega x^1 \\ 0 \end{pmatrix}$$



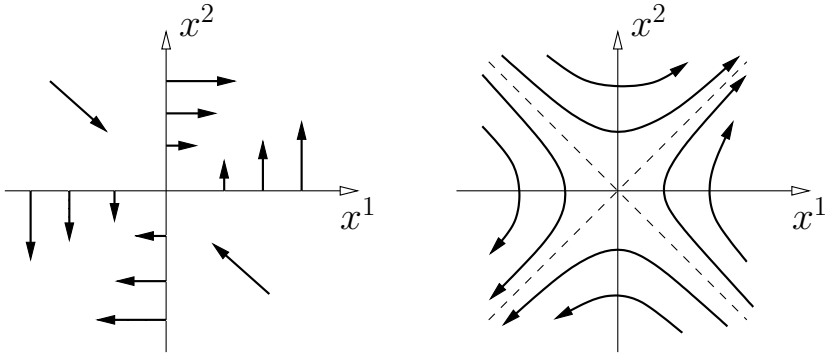
Die graphische Darstellumg dieses Vektorfeldes offenbart, daß $\underline{v}(\underline{r})$ einen Wirbel beschreibt. Die Berechnung der Rotation führt auf

$$\partial_{\underline{r}} \times \underline{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2\omega \end{pmatrix}$$

Der Vektor der Rotation steht offensichtlich senkrecht zur Strömungsebene. Die Strömung dreht sich also im positiven Sinn um die $\underline{e}_3$-Achse.
$\partial_{\underline{r}} \times \underline{v}$ kann als Wirbelstärke der Strömung interpretiert werden.

2.

$$\underline{v}(\underline{r}) = \begin{pmatrix} \omega x^2 \\ \omega x^1 \\ 0 \end{pmatrix}$$



$$\partial_{\underline{r}} \times \underline{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\underline{v}$ ist hier wirbelfrei (irrotational).

Beispiel aus der Elektrodynamik:

$$\partial_{\underline{r}} \times \underline{E} = -\partial_t \underline{B} \quad \text{(Faraday-Gesetz)}$$

Die Wirbelstärke des elektrischen Feldes $\underline{E}$ ist die negative zeitliche Änderung des magnetischen Feldes $\underline{B}$.

2.4 Indexschreibweise und Summenkonvention

Wir vereinbaren, daß Indizes $a, b, \ldots, h$ von 1 bis 3 laufen. Dann gilt:

$$\partial_{\underline{r}}\, f = \sum_a \partial_{x^a} f \underline{e}_a \tag{3.29}$$

$$\partial_{\underline{r}}\, \underline{A} = \sum_a \partial_{x^a} A^a \tag{3.30}$$

$$\partial_{\underline{r}} \times \underline{A} = ?$$

Für die Rotation haben wir noch keine Indexschreibweise.

Wir führen jetzt das Levi-Civita-Symbol ein, das uns auch für die Rotation eine Indexschreibweise ermöglicht.

$$\varepsilon_{abc} = \begin{cases} 1 & \text{gerade Permutation von } a=1,\ b=2,\ c=3 \\ -1 & \text{ungerade Permutation} \\ 0 & \text{mind. zwei Indizes gleich} \end{cases} \tag{3.31}$$

Folglich ergibt sich z.B.

$$\begin{aligned} \varepsilon_{123} &= 1 \\ \varepsilon_{213} &= -1 \\ \varepsilon_{231} &= 1 \\ \varepsilon_{132} &= -1 \\ \varepsilon_{312} &= 1 \\ \varepsilon_{113} &= 0 \\ \varepsilon_{321} &= -1 \end{aligned}$$

Dieses Verhalten nennt man total antisymmetrisch, denn bei der Permutation zweier Indizes ändert sich das Vorzeichen.

Damit ergibt sich die Rotation zu

$$\partial_{\underline{r}} \times \underline{A} = \sum_a \sum_b \sum_c \varepsilon_{abc} \partial_{x^b} A^c \underline{e}_a \tag{3.32}$$

Zur weiteren Vereinfachung der Schreibweise führen wir jetzt die Summenkonvention ein. Die Summenkonvention ist auch als „Einstein-Summenkonvention bekannt“.

Auffällig bei den Indexschreibweisen von $\partial_{\underline{r}}$, $\partial_{\underline{r}}$ und $\partial_{\underline{r}} \times$ ist, daß die Indizes immer doppelt vorkommen.

$$\partial_{\underline{r}}\, f = \sum_a \underbrace{\partial_{x^a} f \underline{e}_a}_{\text{Index } a \text{ doppelt}}$$

$$\partial_{\underline{r}}\, \underline{A} = \sum_a \underbrace{\partial_{x^a} A^a}_{\text{Index } a \text{ doppelt}}$$

$$\partial_{\underline{r}} \times \underline{A} = \sum_a \sum_b \sum_c \underbrace{\varepsilon_{abc} \partial_{x^b} A^c \underline{e}_a}_{\text{Indizes } a, b, c \text{ doppelt}}$$

Wir treffen die folgende Konvention:

> Immer, wenn in einem Term (=Summand) ein Index doppelt auftritt, wird automatisch über diesen Index summiert und das Summenzeichen wird weggelassen.

Also schreibt man mit Summenkonvention:

$$\partial_{\underline{r}}\, f = \partial_{x^a} f \underline{e}_a \tag{3.33}$$
$$\partial_{\underline{r}}\, \underline{A} = \partial_{x^a} A^a \tag{3.34}$$
$$\partial_{\underline{r}} \times \underline{A} = \varepsilon_{abc} \partial_{x^b} A^c \underline{e}_a \tag{3.35}$$

Falls es einmal zu einer Situation kommt, in der ein Index doppelt auftritt, aber trotzdem nicht über ihn summiert werden soll, muß die Summenkonvention dafür aufgehoben werden, z.B. durch Einklammern des Index.

2.5 Mehrfachoperationen

Die Differentialoperatoren $\partial_{\underline{r}}\,, \partial_{\underline{r}}\,, \partial_{\underline{r}}\, \times$ können auch kombiniert werden. Dabei muss aber jeweils beachtet werden, ob es sich um Skalare oder Vektoren handelt. Es sind also nicht alle beliebigen Kombinationen auch mathematisch möglich.

Wichtige Relationen:

- $\partial_{\underline{r}} \times (\partial_{\underline{r}}\, f) \equiv 0$ für beliebige f

  $$\varepsilon_{abc} \partial_{x^b} \partial_{x^c} f \underline{e}_a \equiv 0 \tag{3.36}$$

  Beweis: Übung für den Leser

- $\partial_{\underline{r}}\, (\partial_{\underline{r}} \times \underline{A}) \equiv 0$ für beliebige $\underline{A}$

  $$\partial_{x^a} \varepsilon_{abc} \partial_{x^b} A^c \equiv 0 \tag{3.37}$$

  Beweis: Übung für den Leser

- $\partial_{\underline{r}}\, (f \cdot \underline{A}) = \partial_{\underline{r}}\, f \cdot \underline{A} + f \cdot \partial_{\underline{r}}\, \underline{A}$
  oder in Indexschreibweise

  $$\partial_{x^a} (f \cdot A^a) = \partial_{x^a} f \cdot A^a + f \partial_{x^a} A^a \tag{3.38}$$

  Beweis:

$$\begin{aligned}
\partial_{x^a}(f \cdot A^a) &= \partial_{x^a} f \cdot A^a + f \partial_{x^a} A^a \\
\partial_{\underline{r}}\, f \cdot \underline{A} &= (\partial_{x^a} f \underline{e}_a) \left(A^b \underline{e}_b\right) \\
&= (\partial_{x^a} f)\, A^b \underbrace{\underline{e}_a \underline{e}_b}_{\delta_{ab}} \\
&= (\partial_{x^a} f)\, A^b \delta_{ab} \\
&= (\partial_{x^a} f)\, A^a \\
&= A^a \partial_{x^a} f \\
\curvearrowright \partial_{x^a}(f \cdot A^a) &= A^a \partial_{x^a} f + f \partial_{x^a} A^a
\end{aligned}$$

q.e.d.

- Laplace-Operator
$$\partial_{\underline{r}}\, \partial_{\underline{r}}\, f \equiv \partial^2_{\underline{r}}\, f \equiv \Delta f \tag{3.39}$$
Dabei ist $\Delta = \partial^2_{\underline{r}}$ der Laplace-Operator. $\partial^2_{\underline{r}}$ ist definiert als:
$$\partial^2_{\underline{r}} = \partial_{x^a}\partial_{x^a} = \partial^2_{x^a} = \partial^2_{x^1} + \partial^2_{x^2} + \partial^2_{x^3} \tag{3.40}$$

- $$\begin{aligned} \partial_{\underline{r}} \times \partial_{\underline{r}} \times \underline{A} &= \partial_{\underline{r}}\, \partial_{\underline{r}}\, \underline{A} - (\partial^2_{\underline{r}}\, A^a)\underline{e}_a \\ &= \partial_{\underline{r}}\, \partial_{\underline{r}}\, \underline{A} - \partial^2_{\underline{r}}\, \underline{A} \end{aligned} \tag{3.41}$$
$\partial^2_{\underline{r}}\, \underline{A}$ bedeutet eine Anwendung von $\partial^2_{\underline{r}}$ auf die einzelnen Komponenten von $\underline{A}$.
Beweis: Übung für den Leser.

3 Integration von Vektoren

3.1 Vektorielle Integralausdrücke

Wir übertragen den Integralbegriff für Skalare jetzt auf vektorielle Größen.

Für Skalare wurden folgende Typen von Integralen behandelt:

- Linienintegral im $\mathbb{R}^3$ (Kapitel 1.2.2)
$$\int_C f\left(x^1, x^2, x^3\right) \mathrm{d}s$$

- Oberflächenintegral im $\mathbb{R}^3$ (Kapitel 1.2.4)
$$\int_O f\left(x^1, x^2, x^3\right) \mathrm{d}O$$

- Volumenintegral im $\mathbb{R}^3$ (Kapitel 1.2.5)
$$\int_V f\left(x^1, x^2, x^3\right) \mathrm{d}V$$

Die Skalare werden jetzt in Vektoren umgeschrieben und als Integranden betrachtet:

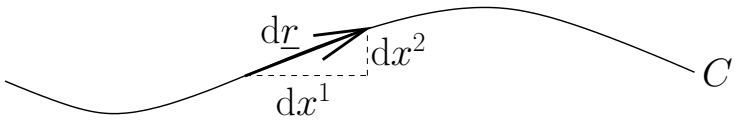
$$f \to \underline{A} = A^a \underline{e}_a = A^a(x^1, x^2, x^3)\underline{e}_a$$

$$\begin{aligned} \int_C \underline{A}\, \mathrm{d}s &= \int_C A^a\left(x^1, x^2, x^3\right) \mathrm{d}s\, \underline{e}_a \\ \curvearrowright \int_O \underline{A}\, \mathrm{d}O &= \int_O A^a\left(x^1, x^2, x^3\right) \mathrm{d}O\, \underline{e}_a \\ \int_V \underline{A}\, \mathrm{d}V &= \int_V A^a\left(x^1, x^2, x^3\right) \mathrm{d}V\, \underline{e}_a \end{aligned}$$

Dies sind mathematische Konstruktionen, die im allgemeinen keine physikalische Bedeutung haben.

Bisher wurden nur die Integranden in Vektoren überführt. Auch die Differentiale lassen sich von Skalaren auf Vektoren umschreiben:

- $\mathrm{d}s \to \mathrm{d}\underline{r}$



Es soll gelten

$$\mathrm{d}s = |\mathrm{d}\underline{r}|$$

und

$$\mathrm{d}\underline{r} = \mathrm{d}x^1\underline{e}_1 + \mathrm{d}x^2\underline{e}_2 + \mathrm{d}x^3\underline{e}_3 = \mathrm{d}x^b\underline{e}_b.$$

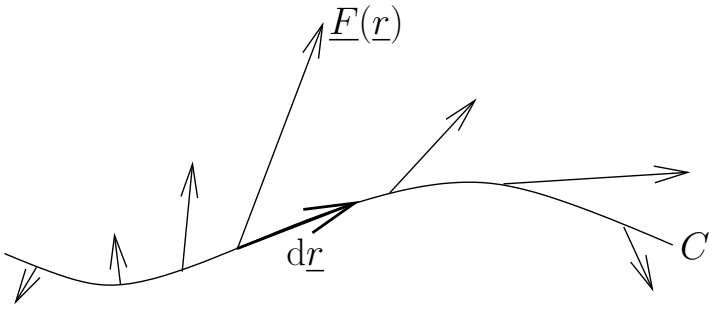
Dann folgt

$$\mathrm{d}s = \sqrt{\mathrm{d}\underline{r}\cdot\mathrm{d}\underline{r}} = \sqrt{(\mathrm{d}x^1)^2 + (\mathrm{d}x^2)^2 + (\mathrm{d}x^3)^2}.$$

Die Konstruktion eines Integrals der folgenden Form ist möglich.

$$\begin{aligned}\int_C \underline{A}\cdot\mathrm{d}\underline{r} &= \int_C A^a\underline{e}_a\mathrm{d}x^b\underline{e}_b \\ &= \int_C A^a\mathrm{d}x^a \\ &= \int_C A^1\mathrm{d}x^1 + \int_C A^2\mathrm{d}x^2 + \int_C A^3\mathrm{d}x^3\end{aligned} \tag{3.42}$$

Diesen Typ Integral nennt man Kurvenintegral. Dem Kurvenintegral kommt physikalische Bedeutung zu.



Zur Interpretation betrachten wir ein Beispiel:

$\underline{F}$ sei ein Kraftfeld. Ein Massenpunkt wird entlang der Kurve C bewegt. Die Kurve C stellt z.B. eine Schiene dar. Die Kraft greift „schräg“ an, berechnet werden soll die benötigte Arbeit W:

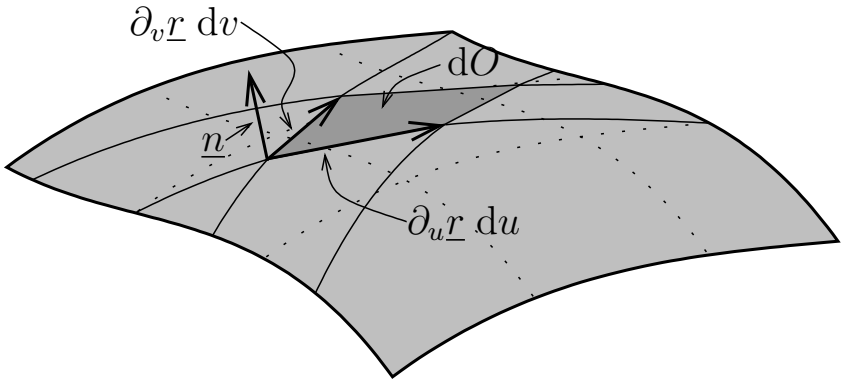
$$W = \int_C \underline{F}(\underline{r})\mathrm{d}\underline{r} \tag{3.43}$$

Die Arbeit W ist gerade das Kurvenintegral über die Kraft $\underline{F}$ längs des Weges C.

- $\mathrm{d}O \to \mathrm{d}\underline{O}$

Es soll gelten $\mathrm{d}O \stackrel{!}{=} |\mathrm{d}\underline{O}|$. $\mathrm{d}\underline{O}$ konstruieren wir in Anlehnung an Kapitel 1.2.4. Die Richtung einer Fläche wird als senkrecht auf der Fläche stehend eingeführt. Der Normalenvektor $\underline{n}$ wird als nach „außen“ gerichtet definiert und $\underline{n}$ sei ein Einheitsvektor. $\underline{n}$ ist dann folgendermaßen zu berechnen:

$$\underline{n} = \frac{\partial_u\underline{r}\mathrm{d}u \times \partial_v\underline{r}\mathrm{d}v}{|\partial_u\underline{r}\mathrm{d}u \times \partial_v\underline{r}\mathrm{d}v|} = \frac{\partial_u\underline{r} \times \partial_v\underline{r}}{|\partial_u\underline{r} \times \partial_v\underline{r}|} \tag{3.44}$$



Für das vektorielle Oberflächenintegral $\mathrm{d}\underline{O}$ folgt unter Anwendung von (1.68)

$$\mathrm{d}\underline{O} = \underline{n}\mathrm{d}O = (\partial_u \underline{r} \times \partial_v \underline{r})\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \tag{3.45}$$

Nun lassen sich Integrale der Form

$$\int_O \underline{A}\,\mathrm{d}\underline{O} \tag{3.46}$$

konstruieren, aber auch

$$\int_O \underline{A} \times \mathrm{d}\underline{O} \tag{3.47}$$

sowie

$$\int_O f\,\mathrm{d}\underline{O} \tag{3.48}$$

Die wichtigste physikalische Bedeutung hat der Typ

$$\int_O \underline{A}\,\mathrm{d}\underline{O}$$

Zur Interpretation betrachten wir wieder ein Beispiel. $\underline{F}(\underline{r})$ sei eine inhomogene Materieflußdichte.

$$[\underline{F}] = \frac{Kg}{m^2 s}$$

Zu berechnen ist der gesamte Materiefluß μ pro Zeit durch eine Fläche O. Der Materiefluß durch das Oberflächenelement $\mathrm{d}O$ ist offenbar

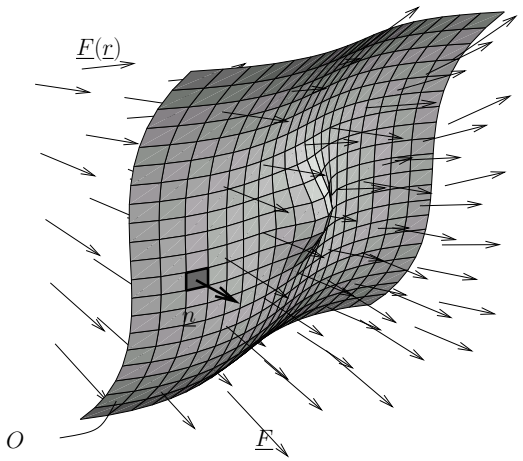
$$\mathrm{d}\mu = \underline{F}\,\underline{n}\,\mathrm{d}O = \underline{F}\,\mathrm{d}\underline{O}. \tag{3.49}$$

Der Gesamtmateriefluß ist dann

$$\mu = \int_O \underline{F}\,\underline{n}\,\mathrm{d}O = \int_O \underline{F}\,\mathrm{d}\underline{O} \tag{3.50}$$

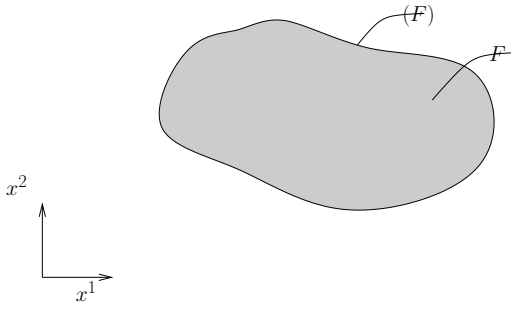
$$[\mu] = \frac{Kg}{s}$$

- Ein Übergang $\mathrm{d}V \to \mathrm{d}\underline{V}$ ist nicht möglich, da es kein vektorielles Volumenelement gibt. Es sind Integrale der Formen $\int_V f\mathrm{d}V$ oder $\int_V \underline{A}\mathrm{d}V$ konstruierbar, die oben bereits angegeben wurden.



3.2 Green-Integralsatz der Ebene

Der Green-Integralsatz der Ebene verknüpft ein Flächenintegral über eine ebene Fläche mit einem Kurvenintegral über den Rand dieser Fläche.



Sind $A^1\left(x^1,x^2\right)$, $A^2\left(x^1,x^2\right)$ stetig auf F und (F), dann gilt

$$\oint_{(F)} \left\{A^1 \mathrm{d}x^1 + A^2 \mathrm{d}x^2\right\} = \iint_F \left(\partial_{x^1} A^2 - \partial_{x^2} A^1\right) \mathrm{d}x^1 \mathrm{d}x^2 \tag{3.51}$$

Das ist der Green-Integralsatz der Ebene. Den Beweis dieses Satzes führen wir in zwei Varianten aus. Für eine elegante Beweismethode greifen wir zum einen auf den Integralsatz von Cauchy aus dem vorherigen Kapitel zurück. Zum anderen ist aber auch eine autarke Beweisführung möglich.

Beweis-Variante 1:
Ausgangspunkt ist der Integralsatz von Cauchy 2.4.1:

$$\begin{aligned}
\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z &= \oint_C (u+iv)(\mathrm{d}x + i\mathrm{d}y) \\
&= \oint_C (u\mathrm{d}x - v\mathrm{d}y) + i\oint_c (v\mathrm{d}x + u\mathrm{d}y) \qquad \text{(siehe 2.33)} \\
&= \iint_F (-\partial_y u - \partial_x v)\,\mathrm{d}F + i\iint_F (-\partial_y v + \partial_x u)\,\mathrm{d}F \qquad \text{(siehe 2.38)}
\end{aligned}$$

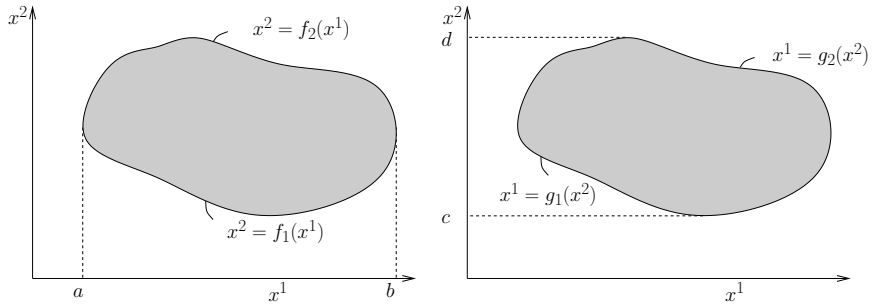
Jetzt werden die Realteile verglichen und dabei einige Ausdrücke ersetzt:

$$\begin{aligned}
u &\to A^1 & -v &\to A^2 \\
x &\to x^1 & y &\to x^2
\end{aligned}$$

$$\oint_{C=(F)} \left(A^1\,\mathrm{d}x^1 + A^2\,\mathrm{d}x^2\right) = \iint_F \left(\partial_{x^1} A^2 - \partial_{x^2} A^1\right) \mathrm{d}x^1 \mathrm{d}x^2$$

q.e.d.

Beweis-Variante 2:



Wir setzen voraus, dass die Fläche F konvex berandet ist, so dass die Funktionen $f_1(x^1)$, $f_2(x^1)$, $g_1(x^2)$, $g_2(x^2)$ jeweils eindeutig sind. Für Flächen mit ausgeprägten konkaven Formen könnten auch Mehrdeutigkeiten auftreten. Durch geeignete Zerlegung derartiger Flächen lässt sich obige Voraussetzung für Teilflächen immer erfüllen.
Für die Parametrisierung der Fläche F und des Randes (F) werden x^1 und x^2 gewählt. Dann ergibt sich

$$\begin{aligned}
\iint_F \partial_{x^2} A^1 \mathrm{d}F &= \int_a^b \int_{f_1(x^1)}^{f_2(x^1)} \partial_{x^2} A^1 \mathrm{d}x^2 \mathrm{d}x^1 \\
&= \int_a^b \{A^1(x^1, f_2(x^1)) - A^1(x^1, f_1(x^1))\} \mathrm{d}x^1 \\
&= -\int_a^b A^1(x^1, f_1(x^1)) \mathrm{d}x^1 - \int_b^a A^1(x^1, f_2(x^1)) \mathrm{d}x^1 \\
&= -\oint_{(F)} A^1(x^1, x^2) \mathrm{d}x^1
\end{aligned}$$

Weiterhin folgt

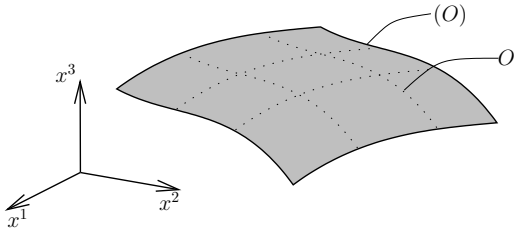
$$\begin{aligned}\iint\limits_F \partial_{x^1} A^2 \mathrm{d}F &= \int\limits_c^d \int\limits_{g_1(x^2)}^{g_2(x^2)} \partial_{x^1} A^2 \mathrm{d}x^1 \mathrm{d}x^2 \\ &= \int\limits_c^d \{A^2(g_2(x^2), x^2) - A^2(g_1(x^2), x^2)\} \mathrm{d}x^2 \\ &= \int\limits_c^d A^2(g_2(x^2), x^2) \mathrm{d}x^2 + \int\limits_d^c A^2(g_1(x^2), x^2) \mathrm{d}x^2 \\ &= \oint\limits_{(F)} A^2(x^1, x^2) \mathrm{d}x^2\end{aligned}$$

Addition liefert den Satz:

$$\iint\limits_F (\partial_{x^1} A^2 - \partial_{x^2} A^1) \mathrm{d}F = \oint\limits_{(F)} A^1 \mathrm{d}x^1 + \oint\limits_{(F)} A^2 \mathrm{d}x^2 \quad .$$

3.3 Stokes-Integralsatz

Der Stokes-Integralsatz verknüpft ein Oberflächenintegral über eine gekrümmte Fläche im Raum mit einem Kurvenintegral über den Rand dieser Fläche.



Ist $\underline{A}(\underline{r})$ auf (O) stetig, dann gilt:

$$\oint\limits_{(O)} \underline{A} d\underline{r} = \int\limits_O \partial_{\underline{r}} \times \underline{A} \cdot \mathrm{d}\underline{O} \tag{3.52}$$

Dies ist der Stokes-Integralsatz.

Beweis:

- Rückführung des Problems auf ein ebenes Problem und Anwendung des Green-Satzes der Ebene auf dieses Problem:

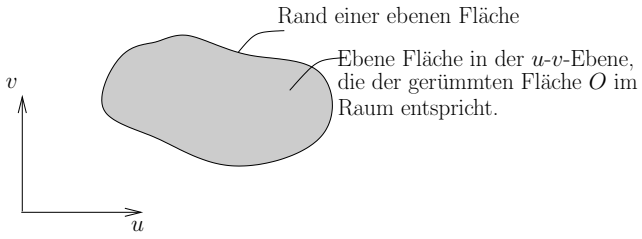
  $x^1, x^2, x^3 \quad \longrightarrow \quad u, v$

  gekrümmte Fläche im $\mathbb{R}^3$ — ebene Fläche im $\mathbb{R}^2$

- Parametrisierung der Fläche O durch

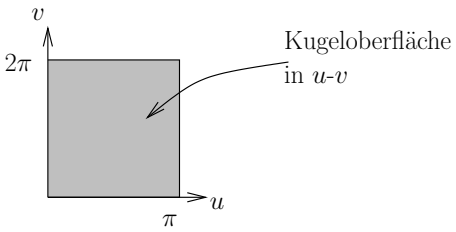
$$\left.\begin{aligned} x^1 &= x^1(u,v) \\ x^2 &= x^2(u,v) \\ x^3 &= x^3(u,v) \end{aligned}\right\} \underline{r} = \underline{r}(u,v) \tag{3.53}$$

- Die Parameter u, v durchlaufen den u-v-Parameterbereich, der einer Ebene entspricht.



Beispiel: 1. Kugeloberfläche:

$$\begin{aligned} x^1 &= R \sin u \cos v \\ x^2 &= R \sin u \sin v \\ x^3 &= R \cos u \end{aligned}$$



2. Kugelkappe:
   Es wird die gleiche Parametrisierung verwendet, aber der Parameterraum verändert:

$$\begin{aligned} v &\,\epsilon\, [0, 2\pi] \\ u &\,\epsilon\, [0, \phi_0] \end{aligned}$$

- Die Differentiale werden in Darstellungen mit $\mathrm{d}u$ und $\mathrm{d}v$ umgerechnet:

$$\mathrm{d}\underline{O} = \partial_u \underline{r} \times \partial_v \underline{r}\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v \tag{3.54}$$

$$\mathrm{d}\underline{r} = \partial_u \underline{r}\, \mathrm{d}u + \partial_v \underline{r}\, \mathrm{d}v \tag{3.55}$$

- Damit ergibt sich für die linke Seite des Stokes-Satzes:

$$\oint \underline{A}\, \mathrm{d}\underline{r} = \oint \underline{A}\, \partial_u \underline{r}\, \mathrm{d}u + \underline{A}\, \partial_v \underline{r}\, \mathrm{d}v \tag{3.56}$$

- Die rechte Seite ergibt:

$$\iint \partial_{\underline{r}} \times \underline{A} \cdot \mathrm{d}\underline{O} = \iint \partial_{\underline{r}} \times \underline{A} \cdot (\partial_u \underline{r} \times \partial_v \underline{r})\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v \tag{3.57}$$

- Jetzt wird der Green-Integralsatz auf die linke Seite angewendet. Dabei werden folgende Entsprechungen verwendet:

Green		Stokes
x^1	$\hat{=}$	u
x^2	$\hat{=}$	v
A^1	$\hat{=}$	$\underline{A} \partial_u \underline{r}$
A^2	$\hat{=}$	$\underline{A} \partial_v \underline{r}$

- Zu zeigen ist noch die Gleichheit der rechten Seiten:

$$\begin{aligned} \partial_{x^1} A^2 - \partial_{x^2} A^1 &\hat{=} \partial_u \left(\underline{A}\, \partial_v \underline{r}\right) - \partial_v \left(\underline{A}\, \partial_u \underline{r}\right) \\ &\overset{!}{=} \partial_{\underline{r}} \times \underline{A} \cdot (\partial_u \underline{r} \times \partial_v \underline{r}) \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} \partial_u \left(\underline{A}\,\partial_v \underline{r}\right) - \partial_v \left(\underline{A}\,\partial_u \underline{r}\right) &= \partial_u \underline{A}\,\partial_v \underline{r} + \underline{A}\,\partial_u \partial_v \underline{r} - \partial_v \underline{A}\,\partial_u \underline{r} - \underline{A}\,\partial_u \partial_v \underline{r} \\ &= \partial_u \underline{A}\,\partial_v \underline{r} - \partial_v \underline{A}\,\partial_u \underline{r} \end{aligned} \tag{3.58}$$

- $$\begin{aligned} \partial_{\underline{r}} \times \underline{A}\left(\partial_u \underline{r} \times \partial_v \underline{r}\right) &= \varepsilon_{abc} \partial_{x^b} A^c\, \varepsilon_{ade} \partial_u x^d \partial_v x^e \\ &= \left(\delta_{bd}\delta_{ce} - \delta_{be}\delta_{cd}\right) \partial_{x^b} A^c \partial_u x^d \partial_v x^e \\ &= \partial_{x^b} A^c \partial_u x^b \partial_v x^c - \partial_{x^b} A^c \partial_u x^c \partial_v x^b \\ &= \partial_u A^c \partial_v x^c - \partial_v A^c \partial_u x^c \\ &= \partial_u \underline{A}\,\partial_v \underline{r} - \partial_v \underline{A}\,\partial_u \underline{r} \end{aligned}$$

  Die rechte Seite ist identisch mit der von 3.58; also sind auch die linken Seiten gleich.

q.e.d.

Bemerkungen:

- Folgende Beziehung wurde verwendet:
$$\varepsilon_{abc}\varepsilon_{ade} = \delta_{bd}\delta_{ce} - \delta_{bc}\delta_{ce} \tag{3.59}$$
- Die Produktregel für Differentiation ist auch für Vektoren gültig:
$$\partial_u \left\{\underline{A}(u)\underline{B}(u)\right\} = \partial_u \underline{A} \cdot \underline{B} + \underline{A}\,\partial_u \underline{B} \tag{3.60}$$
  denn
$$\partial_u \left\{A^a B^a\right\} = \left(\partial_u A^a\right) B^a + A^a \partial_u B^a$$

Zur physikalischen Intepretation des Stokes-Satzes betrachten wir ein Beispiel. Sei $\underline{v}$ ein Strömungsfeld. Die Zirkulation Z längs einer geschlossenen Kurve C ist wie folgt definiert.

$$Z = \oint_C \underline{v} \cdot \mathrm{d}\underline{r} \tag{3.61}$$

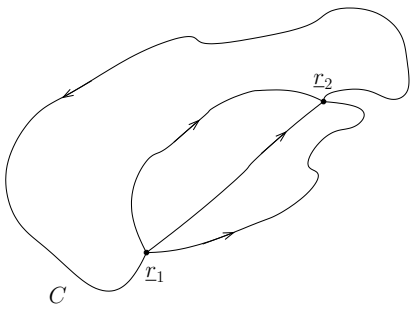
Nach Stokes ergibt sich:

$$Z = \int_O \partial_{\underline{r}} \times \underline{v}\, d\underline{O} \tag{3.62}$$

Die Zirkulation entlang einer geschlossenen Kurve ist also gleich der Summe der Wirbelstärke über die eingeschlossene Fläche.

Folgerungen aus dem Stokes-Integralsatz:

- Sei $\partial_{\underline{r}} \times \underline{A} = 0$ (wirbelfreies Feld)
  $\curvearrowright$ (1) $\oint_C \underline{A}\,\mathrm{d}\underline{r} = 0$
  $\curvearrowright$ Wegunabhängigkeit des Kurvenintegrals, analog zum Cauchy-Integralsatz



- Sei $\partial_{\underline{r}} \times \underline{A} = 0 \curvearrowright (2)\ \underline{A} = \partial_{\underline{r}}\, \phi$ d.h. es existiert ein Potential ϕ

$$\begin{aligned}\int_{\underline{r}_1}^{\underline{r}_2} \underline{A}\,\mathrm{d}\underline{r} &= \int_{\underline{r}_1}^{\underline{r}_2} \partial_{\underline{r}}\,\phi\,\mathrm{d}\underline{r} \\ &= \int_{\underline{r}_1}^{\underline{r}_2} \partial_{x^a}\phi\,\mathrm{d}x^a \\ &= \int_{\underline{r}_1}^{\underline{r}_2} \mathrm{d}\phi = \phi|_{\underline{r}_1}^{\underline{r}_2} \\ &= \phi\,(\underline{r}_2) - \phi\,(\underline{r}_1)\end{aligned}$$

  Das Kurvenintegral ist dann nur von Anfangs- und Endpunkten abhängig, d.h. die Wegunabhängigkeit folgt auch hier.

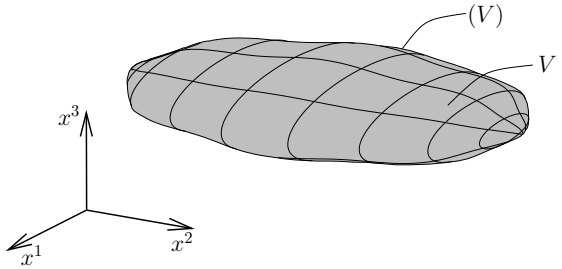
- Eine wichtige physikalische Anwendung des Stokes-Satzes ist die Berechnung von Verschiebungsarbeiten in Kraftfeldern. Sei $\underline{K}$ ein Kraftfeld, dann ist $W = \int_C \underline{K}\,\mathrm{d}\underline{r}$ die Arbeit. Besonders interessant sind wirbelfreie Kraftfelder, da sie sich aus einem Potential ableiten lassen. Dann gilt:

$$\partial_{\underline{r}} \times \underline{K} = 0 \qquad \curvearrowright \underline{K} = -\partial_{\underline{r}}\,\phi$$

$$\curvearrowright W = \int_C \underline{K}\,\mathrm{d}\underline{r} = -\,\phi|_{\underline{r}_1}^{\underline{r}_2} = \phi\,(\underline{r}_1) - \phi\,(\underline{r}_2) \tag{3.63}$$

3.4 Gauß-Integralsatz

Der Gauß-Integralsatz verknüpft ein Volumenintegral mit einem Flächenintegral über den Rand dieses Volumens.



Ist $\underline{A}(\underline{r})$ auf (V) stetig, dann gilt:

$$\int_V \partial_{\underline{r}}\,\underline{A}\,\mathrm{d}V = \oint_{(V)} \underline{A}\,\mathrm{d}\underline{O} \tag{3.64}$$

Dies ist der Gauß-Integralsatz.

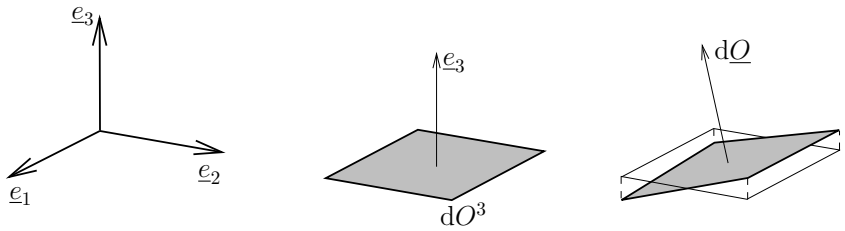
Beweis:

- Wir betrachten eine einzelne Komponente des Vektorfeldes $\underline{A}$, z.B. A^3, entsprechend der Basiszerlegung $\underline{A} = A^a \underline{e}_a$.

- $\mathrm{d}\underline{O}$ wird in seine Komponenten zerlegt, entsprechend der Basisdarstellung

$$\mathrm{d}\underline{O} = \mathrm{d}O^1\underline{e}_1 + \mathrm{d}O^2\underline{e}_2 + \mathrm{d}O^3\underline{e}_3 = (\partial_u\underline{r} \times \partial_v\underline{r})\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \tag{3.65}$$

- Die Komponenten $\mathrm{d}O^a$ sind Projektionen des gerichteten Flächenelements $\mathrm{d}\underline{O}$ in die Koordinatenebenen. $\mathrm{d}O^a = \mathrm{d}\underline{O}\,\underline{e}_a$, z.B.$\mathrm{d}O^3 = \mathrm{d}\underline{O}\,\underline{e}_3$

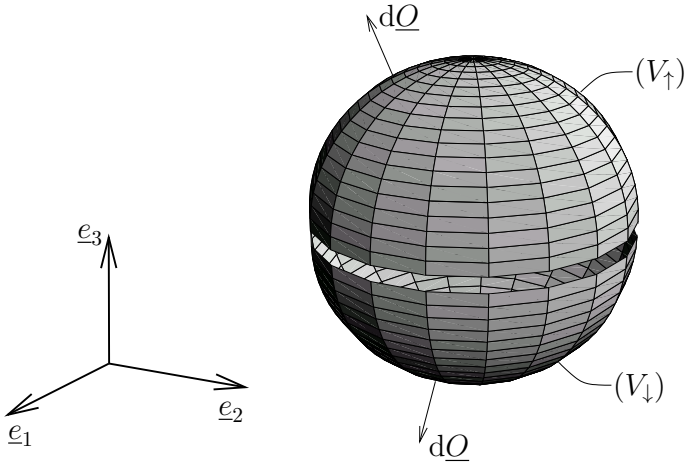


$$\mathrm{d}O^3 = (\partial_u\underline{r} \times \partial_v\underline{r})\,\underline{e}_3\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \left(\partial_u x^1\partial_v x^2 - \partial_v x^1\partial_u x^2\right)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \tag{3.66}$$

denn

$$\begin{aligned}\partial_u\underline{r} \times \partial_v\underline{r} &= \begin{vmatrix} \underline{e}_1 & \underline{e}_2 & \underline{e}_3 \\ \partial_u x^1 & \partial_u x^2 & \partial_u x^3 \\ \partial_v x^1 & \partial_v x^2 & \partial_v x^3 \end{vmatrix} \\ &= \cdots\underline{e}_1 + \cdots\underline{e}_2 + \left(\partial_u x^1\partial_v x^2 - \partial_v x^1\partial_u x^2\right)\,\underline{e}_3\end{aligned}$$

- (V) wird jetzt in einen oberen und einen unteren Anteil zerlegt, so daß sich x^3 auf (V) jeweils als Funktion von x^1, x^2 schreiben lässt. Das funktioniert nicht bei allen Körpern; schwierigere Körper lassen sich aber aus einfachen zusammensetzen. Die Oberflächenintegrale über die Stoßflächen heben sich dann gegenseitig auf, da die Normalenvektoren entgegengesetzte Richtungen haben. Den oberen Anteil nennen wir $(V_\uparrow)$, den unteren $(V_\downarrow)$



- $(V_\uparrow)$ und $(V_\downarrow)$ werden jetzt parametrisiert:
- allgemein: $x^1 = x^1(u,v);\ x^2 = x^2(u,v);\ x^3 = x^3(u,v)$
- in diesem Fall:

$$\begin{aligned}(V_\uparrow):&\quad x^1 = u,\quad x^2 = v,\quad x^3 = x^3_\uparrow(x^1,x^2),\quad \mathrm{d}O^3 = \mathrm{d}x^1\,\mathrm{d}x^2 \\ (V_\downarrow):&\quad x^1 = v,\quad x^2 = u,\quad x^3 = x^3_\downarrow(x^1,x^2),\quad \mathrm{d}O^3 = -\mathrm{d}x^1\,\mathrm{d}x^2\end{aligned} \tag{3.67}$$

Für die untere Fläche sind u, v vertauscht, da der Normalenvektor hier nach unten zeigen soll!

- Damit ergibt sich für den linken A^3-Anteil des Gauß-Satzes:

$$\int_V \partial_{x^3} A^3 \,\mathrm{d}V = \int_V \partial_{x^3} A^3 \,\mathrm{d}x^1 \mathrm{d}x^2 \mathrm{d}x^3$$

$$\int \partial_{x^3} A^3 \,\mathrm{d}x^3 = A^3\big|_{x^3_\downarrow}^{x^3_\uparrow} = A^3\left(\ldots, x^3_\uparrow\right) - A^3\left(\ldots, x^3_\downarrow\right)$$

$$\int_V \partial_{x^3} A^3 \,\mathrm{d}V = \underbrace{\int \left\{A^3\left(x^1, x^2, x^3_\uparrow\left(x^1, x^2\right)\right) - A^3\left(x^1, x^2, x^3_\downarrow\left(x^1, x^2\right)\right)\right\} \mathrm{d}x^1 \mathrm{d}x^2}_{\text{es wird über den } x^1\text{-}x^2\text{-Bereich integriert}} \tag{3.68}$$

- Wir machen jetzt die spezielle Parametrisierung von $(V_\uparrow)$ und $(V_\downarrow)$ mittels der Parameter x^1 und x^2 rückgängig. (Wir vergessen sie einfach.) Jetzt gilt also wieder $x^a = x^a(u, v)$ sowie $\mathrm{d}x^1\,\mathrm{d}x^2 = \mathrm{d}O^3$ bzw. $-\mathrm{d}O^3$. Dann ergibt sich aus 3.68:

$$\begin{aligned} \int_V \partial_{x^3} A^3 \,\mathrm{d}V &= \int_{(V_\uparrow)} A^3\left(x^1, x^2, x^3\right) \mathrm{d}O^3 + \int_{(V_\downarrow)} A^3\left(x^1, x^2, x^3\right) \mathrm{d}O^3 \\ &= \int_{(V)} A^3\left(x^1, x^2, x^3\right) \mathrm{d}O^3 \end{aligned} \tag{3.69}$$

- Die Rechnung für die A^1 und A^2-Komponenten ist analog.
- Alle Komponenten zusammengefasst ergeben:

$$\int_V \partial_{\underline{r}} \,\underline{A}\,\mathrm{d}V = \int_{(V)} \underline{A}\,\mathrm{d}\underline{O}$$

q.e.d.

Zur physikalischen Interpratation des Gauß-Satzes betrachten wir Beispiele.

- Sei $\underline{F}$ eine Materieflußdichte, $[\underline{F}] = \frac{Kg}{m^2 s}$. Dann ist nach (3.26) $\partial_{\underline{r}}\,\underline{F}$ die Quellstärke, $\left[\partial_{\underline{r}}\,\underline{F}\right] = \frac{Kg}{m^3 s}$. Weiterhin ist $\underline{F}\cdot\mathrm{d}\underline{O}$ dann der Fluß durch die Fläche $\mathrm{d}\underline{O}$, $[\underline{F}\cdot\mathrm{d}\underline{O}] = \frac{Kg}{s}$. Die Gesamtproduktion von Materie in V ergibt sich dann zu

$$\int_V \partial_{\underline{r}}\,\underline{F}\,\mathrm{d}V \qquad \left[\int_V \partial_{\underline{r}}\,\underline{F}\,\mathrm{d}V\right] = \frac{Kg}{s},$$

während der Gesamtfluß durch die Oberfläche von V durch

$$\int_{(V)} \underline{F}\,\mathrm{d}\underline{O} \qquad \left[\int_{(V)} \underline{F}\,\mathrm{d}\underline{O}\right] = \frac{Kg}{s}$$

dargestellt wird. Nach Gauß fließt die produzierte Materie in einem Volumen über dessen Rand ab.

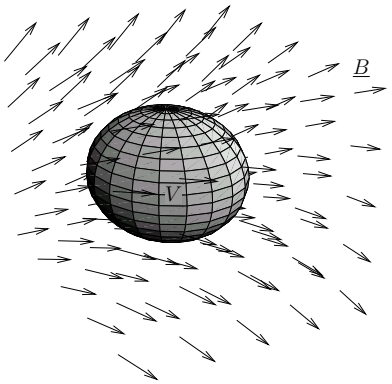
Es sei z.B. $\partial_{\underline{r}}\,\underline{F} = 0$ in ganz V, dann gilt:

$$0 = \int_{(V)} \underline{F}\,\mathrm{d}\underline{O}$$

Materie, die in V über (V) zufließt, muß auch über (V) wieder abfließen.

- Sei $\underline{B}$ die Magnetische Induktion. Die Maxwell-Gleichungen fordern

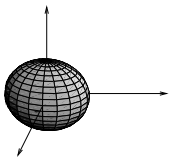
$$\begin{aligned} \partial_{\underline{r}}\, \underline{B} &= 0 \\ \int\limits_{(V)} \underline{B}\, \mathrm{d}\underline{O} &= 0 \end{aligned}$$



Es gibt keine $\underline{B}$-Quellen. Der einem Volumen zufließende magnetische Fluß muß dem abfließenden gleich sein.

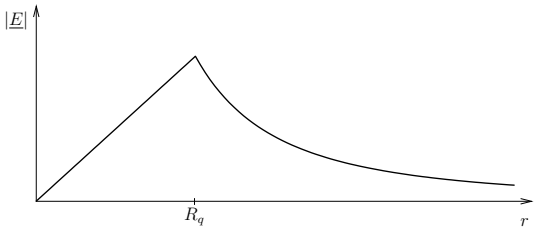
- Sei $\underline{E}$ das Elektrische Feld. Wir betrachten eine homogen geladene Kugel mit Ladung q und Radius R_q. Es gilt:

$$\underline{E}(\underline{r}) = \begin{cases} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\underline{r}}{R_q^3} & \text{für } r \le R_q \\ \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r^2} \frac{\underline{r}}{r} & \text{für } r \ge R_q \end{cases}$$



Dabei ist $r \equiv |\underline{r}|$ und $[q] = C = As$. Für den Betrag des elektrischen Feldes folgt

$$|\underline{E}| = \begin{cases} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{r}{R_q^3} & \text{für } r \le R_q \\ \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r^2} & \text{für } r \ge R_q \end{cases}$$



Die Maxwell-Gleichungen im Vakuum fordern

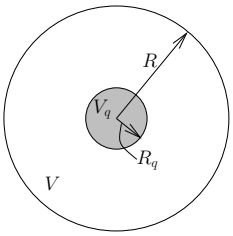
$$\partial_{\underline{r}}\, \underline{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho \tag{3.70}$$

mit ρ als Ladungsdichte. Hier gilt:

$$\rho = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi R_q^3} = \frac{q}{V_q} \qquad [\rho] = \frac{As}{m^3}$$

V_q ist das Volumen der Ladungskugel.

Wir wenden jetzt den Gauß-Satz auf eine Kulgel V an, die V_q enthält:



$$\begin{aligned}\int\limits_V \partial_{\underline{r}}\,\underline{E}\,\mathrm{d}V &= \int\limits_{(V)} \underline{E}\,\mathrm{d}\underline{O} \\ &= \tfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\tfrac{1}{R^3}\int\limits_{(V)} \underline{r}\,\mathrm{d}\underline{O}\end{aligned}$$

Das Oberflächenintegral wird mit Hilfe einer Parametrisierung der Kugeloberfläche berechnet:

$$\begin{aligned}x^1 &= R\,\sin\theta\,\cos\phi \\ x^2 &= R\,\sin\theta\,\sin\phi \\ x^3 &= R\,\cos\theta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\partial_\theta\underline{r}\times\partial_\phi\underline{r} &= \begin{vmatrix} \underline{e}_1 & \underline{e}_2 & \underline{e}_3 \\ R\,\cos\theta\,\cos\phi & R\,\cos\theta\,\sin\phi & -R\,\sin\theta \\ -R\,\sin\theta\,\sin\phi & R\,\sin\theta\,\cos\phi & 0 \end{vmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} R^2\,\sin^2\theta\,\cos\phi \\ R^2\,\sin^2\theta\,\sin\phi \\ R^2\,\cos\theta\,\sin\theta \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\underline{r}\cdot(\partial_\theta\underline{r}\times\partial_\phi\underline{r}) &= R^3\,\sin^3\theta\,\left(\cos^2\phi+\sin^2\phi\right)+R^3\,\cos^2\theta\,\sin\theta \\ &= R^3\,\sin\theta\end{aligned}$$

$$\int\limits_{(V)} \underline{r}\,\mathrm{d}\underline{O} = \int R^3\,\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi = R^3\,4\pi$$

$$\curvearrowright \int\limits_V \partial_{\underline{r}}\,\underline{E}\,\mathrm{d}V = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

Noch schneller läßt sich das Oberflächenintegral mit der folgenden Überlegung berechnen: Auf (V) gilt $r = R$ & $\mathrm{d}\underline{O}\|\underline{r}$. Folglich ist

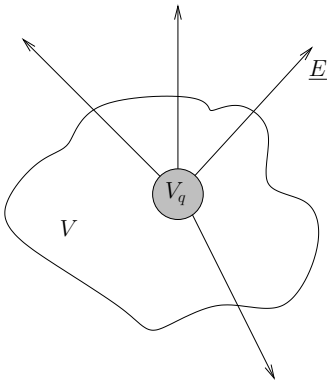
$$\underline{r}\cdot\mathrm{d}\underline{O} = r\,\mathrm{d}O = R\,\mathrm{d}O$$

und damit

$$\int\limits_{(V)} \underline{r}\,\mathrm{d}\underline{O} = R\int\limits_{(V)} \mathrm{d}O = R\cdot 4\pi R^2 = 4\pi R^3$$

Daraus folgt ebenfalls

$$\begin{array}{ccc} \int\limits_V \partial_{\underline{r}}\,\underline{E}\,\mathrm{d}V & = & \frac{q}{\varepsilon_0} \\ \uparrow & & \uparrow \\ \text{Summe aller Quellstärken in V} & & \text{Ladung} \end{array}$$



- Wir betrachten jetzt die Quellstärke des elektrischen Feldes $\partial_{\underline{r}}\,\underline{E}$. Im Außenraum von V_q ($r \geq R_q$) gilt:

$$\partial_{\underline{r}}\,\underline{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\partial_{\underline{r}}\,\frac{\underline{r}}{r^3}$$

$$\begin{aligned}\partial_{\underline{r}}\,\frac{\underline{r}}{r^3} &= \partial_{x^a}\frac{x^a}{r^3}, \quad r = \sqrt{x^b x^b} \\ &= \frac{3r^3 - x^a 3r^2 \partial_{x^a} r}{r^6}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\partial_{x^a} r &= \frac{1}{2r}\left\{\left(\partial_{x^a}x^b\right)x^b + x^b\left(\partial_{x^a}x^b\right)\right\} \\ &= \frac{1}{2r}\left(\delta_{ab}x^b + x^b\delta_{ab}\right) \\ &= \frac{x^a}{r}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\partial_{\underline{r}}\,\frac{\underline{r}}{r^3} &= \frac{3r^3 - 3r^2\frac{x^a x^a}{r}}{r^6} = \frac{3r^3 - 3r^3}{r^6} \\ &= \begin{cases} 0 & r \neq 0 \\ \frac{0}{0} & r = 0 \quad \text{(hier ausgeschl. da } r \geq R_q\text{)} \end{cases}\end{aligned}$$

Im Außenraum verbleibt somit

$$\partial_{\underline{r}}\,\underline{E} = 0.$$

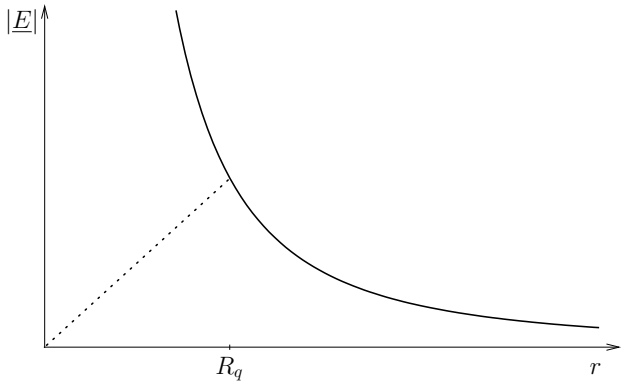
Im Innenraum von V_q ($r \leq R_q$) gilt:

$$\partial_{\underline{r}}\,\underline{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R_q^3}\partial_{\underline{r}}\,\underline{r} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3}{R_q^3}$$

V_q wird jetzt soweit verkleinert, das wir eine Punktladung erhalten. Ein Elektron hat z.B. die Ladung $q = e$ und einen verschwindend geringen Radius. Es ist dann vorteilhaft, die Ladung als Punkt ohne räumliche Ausdehnung zu betrachten. Der Außenraum dringt dann bis $r = 0$ vor.

Wir erhalten das Feld einer Punktladung zu

$$\underline{E}(\underline{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\frac{\underline{r}}{r} \qquad \forall r \tag{3.71}$$



$\underline{E}$ wird dann für $r \to 0$ sehr groß, aber das Volumen in dem $\underline{E}$ groß wird, ist sehr klein. Wir betrachten ρ und $\partial_{\underline{r}}\, \underline{E}$ für $R_q \to 0$:

$$\rho(\underline{r}) = \begin{cases} \frac{q}{\frac{4\pi}{3} R_q^3} & (r \le R_q) \quad \longrightarrow \infty \quad \text{für } R_q \to 0 \\ 0 & (r \ge R_q) \end{cases}$$

also

$$\rho(\underline{r}) = \begin{cases} \infty & r = 0 \\ 0 & r > 0 \end{cases} \tag{3.72}$$

Aus der Maxwell-Gleichung $\partial_{\underline{r}}\, \underline{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho$ folgt:

$$\partial_{\underline{r}}\, \underline{E} = \begin{cases} \infty & r = 0 \\ 0 & r > 0 \end{cases} \tag{3.73}$$

Wir vergleichen nochmal mit den Ergebnissen der vorherigen Rechnung:

$$\partial_{\underline{r}}\, \underline{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{3}{R_q^3} \longrightarrow \infty \quad \text{für } R_q \to 0 \qquad \text{(Inneraum von } V_q\text{)}$$

$$\partial_{\underline{r}}\, \underline{E} = 0 \qquad \text{(Außenraum von } V_q\text{)}$$

Folglich ist die Punktladung mit folgender Festlegung konfliktfrei einführbar:

$$\rho(\underline{r}) = q \cdot \delta(\underline{r}). \tag{3.74}$$

Dabei ist $\delta(\underline{r})$ die Dirac-Deltafunktion mit den folgenden Eingenschaften:

$$\delta(\underline{r}) = \begin{cases} \infty & \underline{r} = 0 \\ 0 & \underline{r} \neq 0 \end{cases} \tag{3.75}$$

$$\int_V \delta(\underline{r})\, \mathrm{d}V = 1 \qquad (V \text{ umschließt } \underline{r} = 0) \tag{3.76}$$

Für eine Punktladung bei $\underline{r} = 0$ ist dann die Divergenz zu schreiben als

$$\partial_{\underline{r}}\, \underline{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} q\, \delta(\underline{r})$$

Zur Überprüfung des Ergebnisses wird jetzt der Gauß-Satz angewendet.

$$\begin{array}{rcl}
\int\limits_V \partial_{\underline{r}}\, \underline{E}\, \mathrm{d}V & = & \int\limits_{(V)} \underline{E}\, \mathrm{d}\underline{O} \\
\downarrow & & \downarrow \\
\int\limits_V \frac{1}{\varepsilon_0} q\, \delta(\underline{r})\, \mathrm{d}V & = & \int\limits_{(V)} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r^2} \frac{\underline{r}}{r}\, \mathrm{d}\underline{O} \\
\downarrow & & \downarrow \text{ ((V) nur außerhalb)} \\
\frac{q}{\varepsilon_0} \int\limits_V \delta(\underline{r})\, \mathrm{d}V & = & \frac{q}{\varepsilon_0} \\
\frac{q}{\varepsilon_0} & = & \frac{q}{\varepsilon_0}
\end{array}$$

Einige Regeln für die Dirac-Deltafunktion:

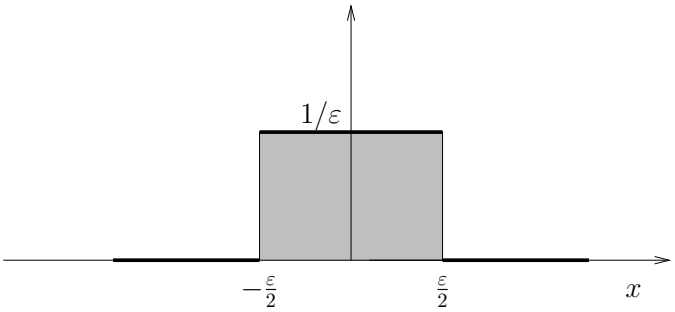
$$\delta(\underline{r}) = \delta\left(x^1\right)\, \delta\left(x^2\right)\, \delta\left(x^2\right) \tag{3.77}$$

mit

$$\begin{array}{rcl}
\int\limits_V \delta(\underline{r})\, \mathrm{d}V & = & \iiint \delta\left(x^1\right) \delta\left(x^2\right) \delta\left(x^3\right)\, \mathrm{d}x^1 \mathrm{d}x^2 \mathrm{d}x^3 \\
& = & \underbrace{\int \delta\left(x^1\right)\, \mathrm{d}x^1}_{1} \underbrace{\int \delta\left(x^2\right)\, \mathrm{d}x^2}_{1} \underbrace{\int \delta\left(x^3\right)\, \mathrm{d}x^3}_{1}
\end{array}$$

$\delta(x)$ ist als Grenzfunktion vorstellbar:

$$\begin{array}{rcl}
\delta(x) & = & \lim\limits_{\varepsilon \to 0} y(x, \varepsilon), \quad \varepsilon \geq 0 \\
& & y(x, \varepsilon) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon} & \text{für } -\frac{\varepsilon}{2} < x < \frac{\varepsilon}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}
\end{array}$$



3.5 Derivate der Integralsätze

- Seien $\Phi, \Psi \,|\, \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^1$ skalare Funktionen.
- Sei $\partial^2_{\underline{r}}$ der Laplace Operator
- Sei $V \subset \mathbb{R}^3$ ein Volumen und (V) der Rand dieses Volumens.

Dann gelten folgende Relationen:

1.
$$\int_V \partial_{\underline{r}}^2 \, \Phi \, \mathrm{d}V = \int_{(V)} \partial_{\underline{r}} \, \Phi \, \mathrm{d}\underline{O} \tag{3.78}$$

2.
$$\int_V \Phi \, \partial_{\underline{r}}^2 \, \Psi \, \mathrm{d}V + \int_V \partial_{\underline{r}} \, \Phi \, \partial_{\underline{r}} \, \Psi \, \mathrm{d}V = \int_{(V)} \Phi \, \partial_{\underline{r}} \, \Psi \, \mathrm{d}\underline{O} \tag{3.79}$$

(1. Green-Integralformel)

3.
$$\int_V \left(\Phi \, \partial_{\underline{r}}^2 \, \Psi - \Psi \, \partial_{\underline{r}}^2 \, \Phi \right) \mathrm{d}V = \int_{(V)} \left(\Phi \, \partial_{\underline{r}} \, \Psi - \Psi \, \partial_{\underline{r}} \, \Phi \right) \mathrm{d}\underline{O} \tag{3.80}$$

(2. Green-Integralformel)

Beweise:
zu (1) $\underline{A} = \partial_{\underline{r}} \, \Phi$ & Gauß-Integralsatz
zu (2) $\underline{A} = \Phi \, \partial_{\underline{r}} \, \Psi$ & Gauß-Integralsatz
zu (3) (2) & $\Psi \leftrightarrow \Phi$ & Differenz

3.6 Ausblick

In der Physik spielen Integralsätze eine große Rolle. In den Physik-Kursen werden sie in der Regel erstmals im Rahmen der E-Dynamik breit angewendet.

- Die Integralsätze vermitteln den Zusammenhang zwischen der differentiellen (lokalen) und der integralen (globalen) Formulierung der Maxwell-Gleichungen.
- Im Vakuum gilt insbesondere:

differentiell		integral
$\partial_{\underline{r}} \, \underline{B} = 0$	$\xrightarrow{\int \mathrm{d}V}$	$\oint \underline{B} \, \mathrm{d}\underline{O} = 0$
$\partial_{\underline{r}} \, \underline{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho$	$\xrightarrow{\int \mathrm{d}V}$	$\oint \underline{E} \, \mathrm{d}\underline{O} = \frac{q}{\varepsilon_0}$
$\partial_{\underline{r}} \times \underline{E} = -\partial_t \underline{B}$	$\xrightarrow{\int \mathrm{d}\underline{O}}$	$\oint \underline{E} \, \mathrm{d}\underline{r} = -\mathrm{d}_t \int \underline{B} \, \mathrm{d}\underline{O}$
$\partial_{\underline{r}} \times \underline{B} = \frac{1}{c^2} \partial_t \underline{E} + \mu_0 \underline{j}$	$\xrightarrow{\int \mathrm{d}\underline{O}}$	$\oint \underline{B} \, \mathrm{d}\underline{r} = \frac{1}{c^2} \mathrm{d}_t \int \underline{E} \, \mathrm{d}\underline{O} + \mu_0 J$

- In der Mathmatik stellen die Integralsätze den Zusammenhang zwischen der Integration über ein Gebiet $\left(\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3\right)$ und den Rand des Gebietes her.

$\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x = F(b) - F(a)$ — Hauptsatz der Int. + Diff. Rechnung

$\int_{(F)} \left(A^1 \, \mathrm{d}x^1 + A^2 \, \mathrm{d}x^2 \right) = \iint_F \left(\partial_{x^1} A^2 - \partial_{x^2} A^1 \right) \mathrm{d}x^1 \, \mathrm{d}x^2$ — Green-Satz

$\int_{(O)} \underline{A} \, \mathrm{d}\underline{r} = \int_O \partial_{\underline{r}} \times \underline{A} \, \mathrm{d}\underline{O}$ — Stokes-Satz

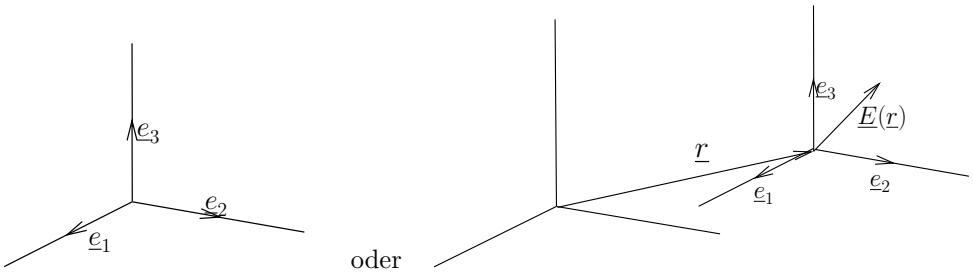
$\int_{(V)} \underline{A} \, \mathrm{d}\underline{O} = \int_V \partial_{\underline{r}} \, \underline{A} \, \mathrm{d}V$ — Gauß-Satz

- In der Sprache der Differentialformen (siehe Kapitel 9) werden sich diese scheinbar recht verschiedenen Integralsätze als Sonderfälle nur eines einzigen Integralsatzes erweisen.

Kapitel 4

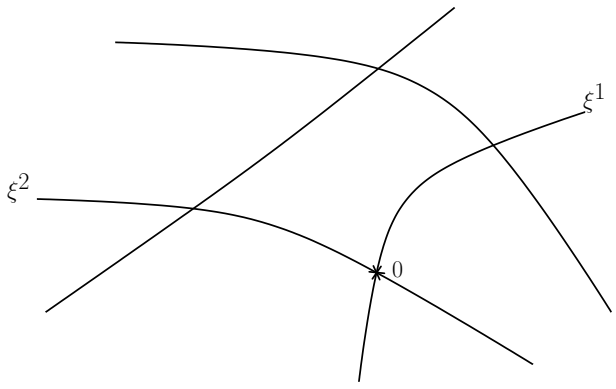
Krummlinige Koordinatensysteme

Bisher haben wir vorrangig kartesische Koordinaten $\{x^a\}$ mit der Basis $\{\underline{e}_a\}$ betrachtet.



Die kartesische Basis ist an jedem Punkt des Raumes gleich, ausserdem bilden die Basisvektoren eine Orthonormalbasis. Das macht das Rechnen mit kartesischen Koordinaten einfach.

Für viele Probleme sind krummlinige Koordinaten besser angepasst, so dass sich das jeweilige Problem vereinfacht, wenn man statt kartesischen geeignete krummlinige Koordinaten verwendet. Krummlinige Koordinaten können schiefwinklig oder orthogonal sein. Wir betrachten den allgemeinen Fall schiefwinkliger krummliniger Koordinaten. In diesem allgemeinen Fall lassen sich zwei Arten von Koordinaten und Basisvektoren unterscheiden, die durch hoch- bzw. tiefgestellte Indizes unterschieden werden.



Für die folgenden Überlegungen wird davon ausgegangen, daß der Raum durch ein kartesisches Koordinatensystem beschrieben werden kann. Dies ist zwar nicht immer möglich, z.B. kann auf der Kugeloberfläche kein zweidimensionales kartesisches Koordinatensystem eingeführt werden, aber davon wollen wir hier absehen. Für Räume in denen dies somit möglich ist, werden jedem Punkt P die kartesischen Koordinaten x_1, x_2, x_3 zugeordnet. Weiterhin sind in jedem Punkt P die gleichen kartesischen Basisvektoren $\underline{e}^1, \underline{e}^2$ und $\underline{e}^3$ definiert. Damit kann im kartesischen Koordinatensystem (und wir tun dies nur in diesem!) jedem Punkt P der "Ortsvektor"

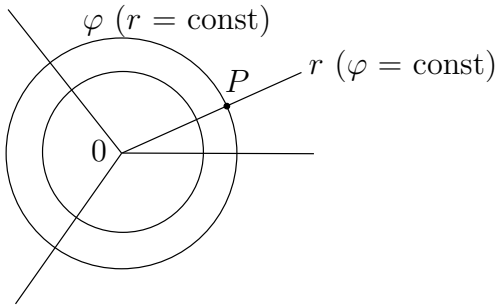
$$\underline{r} = x^1\underline{e}_1 + x^2\underline{e}_2 + x^3\underline{e}_3 \tag{4.1}$$

zugeordnet werden.

Für ein allgemeines KS, werden jedem Punkt P die Koordinaten $\{\xi^1, \xi^2, \xi^3\}$ zugeordnet. Variieren wir ξ^1 und lassen ξ^2 und ξ^3 konstant, dann entsteht eine Kurve, die wir ξ^1-Koordinatenlinie nennen (analog für ξ^2, ξ^3).

Beispiel: Zylinderkoordinaten:

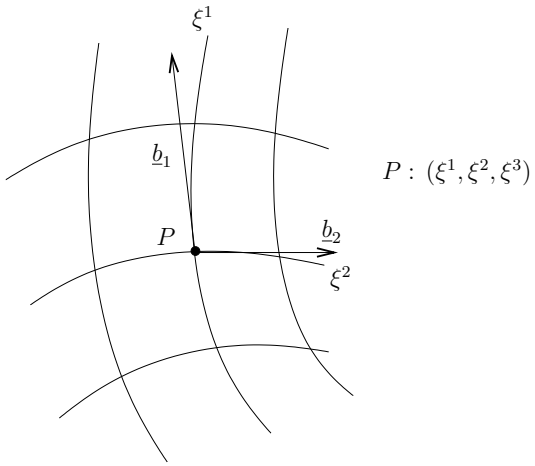
$$\xi^1 = \rho \quad , \quad \xi^2 = \varphi \quad , \quad \xi^3 = z. \tag{4.2}$$



Wichtige Bemerkungen für den folgenden Abschnitt:

- ab jetzt ist die kartesische Basis nicht mehr automatisch Standard
- ab jetzt ist es nicht mehr beliebig, ob Indizes hoch- oder tiefgestellt sind
- es gilt weiterhin die Summenkonvention
- es gilt weiterhin, daß die Indizes $a, b, \ldots$ von 1 bis 3 laufen

1 Kovariante Basis und kontravariante Basis



P entspricht $\underline{r}$, man darf sich unter $\underline{r}$ jetzt aber nicht mehr den kartesischen Ortsvektor $\left(x^1, x^2, x^3\right)$ vorstellen, sondern muß $\underline{r}$ als Punkt im Raum betrachten.

Zwei Arten von Basisvektoren sind naheliegend.

1. Kovariante Basisvektoren $\underline{b}_a \quad , \quad a = 1, 2, 3$

$$\underline{b}_a = \frac{\partial \underline{r}}{\partial \xi^a} \tag{4.3}$$

Die $\underline{b}_a$ schmiegen sich an die Koordinatenlinien an. Die $\underline{b}_a$ sind i.a. nicht normiert.
Beispiel: Polarkoordinaten ($\xi^2 = \varphi$)

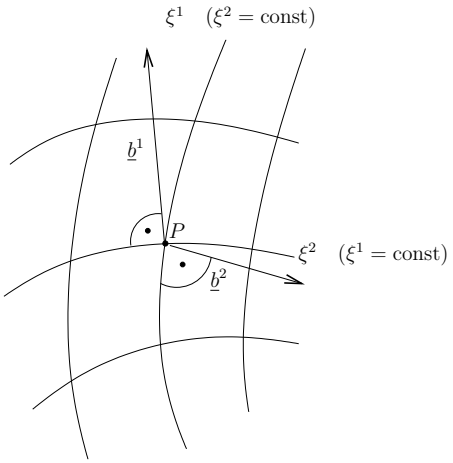
$$|\underline{b}_2| = \left| \frac{\partial \underline{r}}{\partial \xi^2} \right| = \left| \frac{\partial \underline{r}}{\partial \varphi} \right| \neq 1 \tag{4.4}$$

da $\frac{\partial \underline{r}}{\partial \varphi}$ die Maßeinheit einer Länge besitzt und schon aus Gründen der Maßeinheit keine Normierung auf 1 vorliegen kann.

2. Kontravariante Basisvektoren $\underline{b}^a \quad , \quad a = 1, 2, 3$
Die $\underline{b}^a$ werden durch Gradientenbildung auf der Fläche $\xi^a = const.$ durch

$$\underline{b}^a = \nabla \xi^a = \frac{\partial \xi^a}{\partial \underline{r}} = \partial_{\underline{r}} \xi^a = \partial_{\underline{r}}\, \xi^a \tag{4.5}$$

gebildet. $\underline{b}^a$ steht auf der Fläche $\xi^a = const$ senkrecht.



Die $\underline{b}^a$ sind i.a. ebenfalls nicht normiert.

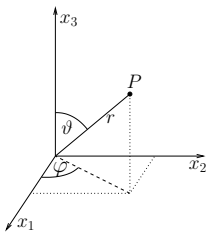
Bemerkung:

1. Für orthogonale Koordinaten gilt offenbar

$$\underline{b}^a \| \underline{b}_a. \tag{4.6}$$

2. Sowohl die $\underline{b}^a$ als auch die $\underline{b}_a$ ändern sich, wenn sich P ändert; die Betrachtungen sind immer lokal.

Beispiel: Kugelkoordinaten



$r = const$: Kugelflächen
$\vartheta = const$: Kegelflächen
$\varphi = const$: Ebenen

2 Metrischer Fundamentaltensor

Das Skalarprodukt

$$g_{ab} \equiv \underline{b}_a \cdot \underline{b}_b \tag{4.7}$$

heisst Metrischer Fundamentaltensor.

Beispiel: In kartesischen Koordinaten ist g_{ab} die Einheitsmatrix. Die Gleichung

$$g_{ab} = \underline{e}_a \underline{e}_b = \delta_{ab} \tag{4.8}$$

ist als Definition des kartesichen Koordinatensystems aufzufassen.

Offenbar gilt allgemein

$$g_{ab} = g_{ba}. \tag{4.9}$$

Desweiteren wird das Skalarprodukt

$$g^{ab} \equiv \underline{b}^a \cdot \underline{b}^b = g^{ba} \tag{4.10}$$

eingeführt sowie

$$g^b_a \equiv \underline{b}_a \cdot \underline{b}^b. \tag{4.11}$$

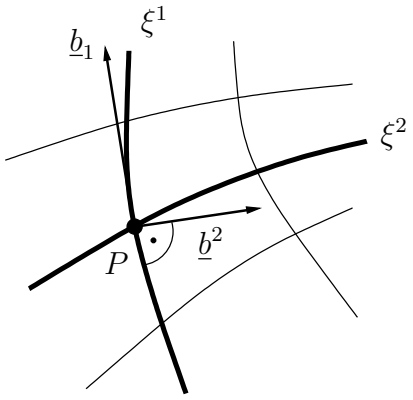
Dann gilt bei Anwendung der Kettenregel

$$g^b_a = \frac{\partial \underline{r}}{\partial \xi^a} \cdot \frac{\partial \xi^b}{\partial \underline{r}} = \frac{\partial \xi^b}{\partial \xi^a} = \delta^b_a \tag{4.12}$$

wobei δ^b_a das Kronecker-Symbol darstellt. Nach Konstruktion der ko- und kontravarianten Basen ist sofort klar, dass

$$\underline{b}_1 \perp \underline{b}^2$$

usw. gilt.



Jetzt noch etwas zur Verifikation der Gleichung (4.12):

1. Man stelle sich vor, die ξ^a sind in einem kartesischen Koordinatensystem eingezeichnet. Dann existiert eine Koordinatentransformation

   $$\xi^a = \xi^a\left(x^1, x^2, x^3\right) = \xi^a\left(x^b\right)$$

   sowie die Rücktransformation

   $$x^c = x^c\left(\xi^1, \xi^2, \xi^3\right) = x^c\left(\xi^d\right)$$

2. Dann gilt

$$\begin{aligned}\frac{\partial \xi^b}{\partial \xi^a} &= \frac{\partial \xi^b}{\partial x^1}\cdot\frac{\partial x^1}{\partial \xi^a}+\frac{\partial \xi^b}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial x^2}{\partial \xi^a}+\frac{\partial \xi^b}{\partial x^3}\cdot\frac{\partial x^3}{\partial \xi^a}\\ &= \left(\frac{\partial \xi^b}{\partial x^1}\underline{e}_1+\frac{\partial \xi^b}{\partial x^2}\underline{e}_2+\frac{\partial \xi^b}{\partial x^3}\underline{e}_3\right)\cdot\left(\frac{\partial x^1}{\partial \xi^a}\underline{e}_1+\frac{\partial x^2}{\partial \xi^a}\underline{e}_2+\frac{\partial x^3}{\partial \xi^a}\underline{e}_3\right)\\ &= \partial_{\underline{r}}\,\xi^b\,\frac{\partial \underline{r}}{\partial \xi^a}=\frac{\partial \xi^b}{\partial \underline{r}}\cdot\frac{\partial \underline{r}}{\partial \xi^a}\end{aligned}$$

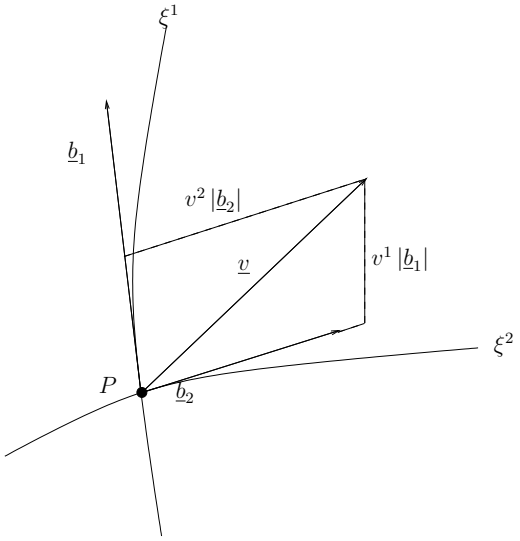
Für $a \neq b$ ist die linke Seite offenbar null; die auf der rechten Seite erzeugten Vektoren müssen damit senkrecht aufeinander stehen.

q.e.d.

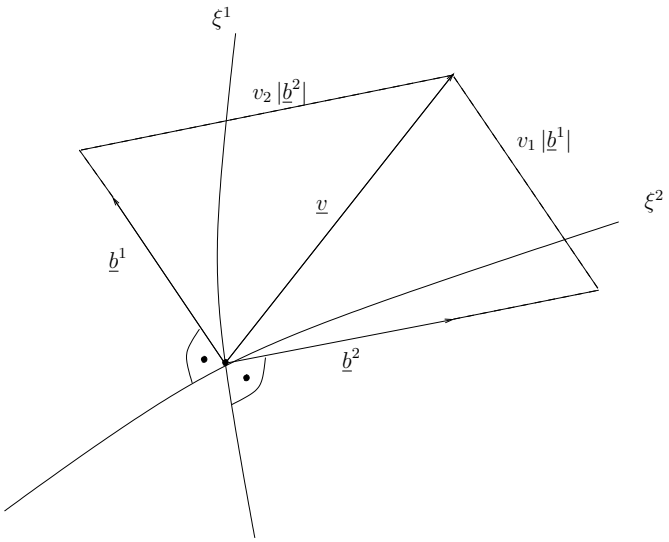
Ein beliebiger Vektor $\underline{v}$ im Punkt P kann sowohl nach der kovarianten als auch nach der kontravarianten Basis zerlegt beschrieben werden. Man schreibt:

$$\underline{v} = v^a\cdot\underline{b}_a = v_a\cdot\underline{b}^a \tag{4.13}$$

v^a heißen die kontravarianten und v_a die kovarianten Komponenten von $\underline{v}$.



Darstellung von $\underline{v}$ in kovarianter Basis und kontravarianten Komponenten.



Darstellung von $\underline{v}$ in kontravarianter Basis und kovarianten Komponenten.

Es gilt:

$$v^a = \underline{v} \cdot \underline{b}^a \tag{4.14}$$

$$v_a = \underline{v} \cdot \underline{b}_a \tag{4.15}$$

Beweis:

$$\underline{v} \cdot \underline{b}^a = v^b \underbrace{\underline{b}_b \cdot \underline{b}^a}_{=\delta_b^a} = v^b \cdot \delta_b^a = v^a \tag{4.16}$$

$$\underline{v} \cdot \underline{b}_a = v_b \underbrace{\underline{b}^b \cdot \underline{b}_a}_{=\delta_a^b} = v_b \cdot \delta_a^b = v_a \tag{4.17}$$

q.e.d.

Kovariante und kontravariante Komponenten eines Vektors $\underline{v}$ lassen sich ineinander umrechnen. Es gilt

$$v_a = \underline{v}\,\underline{b}_a = v^b\,\underline{b}_b\,\underline{b}_a = g_{ab}\,v^b. \tag{4.18}$$

und analog

$$v^a = \underline{v}\,\underline{b}^a = v_b\,\underline{b}^b\,\underline{b}^a = g^{ab}\,v_b \tag{4.19}$$

Damit kann man schreiben

$$\underline{v} = (\underline{v} \cdot \underline{b}^a)\,\underline{b}_a = (\underline{v} \cdot \underline{b}_a)\,\underline{b}^a. \tag{4.20}$$

Insbesondere gilt für $\underline{v} = \underline{b}^a$

$$\underline{b}^a = (\underline{b}^a \cdot \underline{b}^b)\underline{b}_b = g^{ab}\,\underline{b}_b \tag{4.21}$$

bzw. für $\underline{v} = \underline{b}_b$

$$\underline{b}_b = (\underline{b}_b \cdot \underline{b}_c)\,\underline{b}^c = g_{bc} \cdot \underline{b}^c. \tag{4.22}$$

Wegen

$$\begin{aligned} \delta_b^a &= \underline{b}^a \cdot \underline{b}_b = g^{ad} \cdot \underline{b}_d \cdot g_{bc} \cdot \underline{b}^c \\ &= g^{ad} \cdot g_{bc} \underbrace{\underline{b}_d \cdot \underline{b}^c}_{=\delta_d^c} \\ \delta_b^a &= g^{ad} \cdot g_{bc} \cdot \delta_d^c \\ &= g^{ac} \cdot g_{bc} \end{aligned} \tag{4.23}$$

folgt

$$\delta^a_b = g^{ac} \cdot g_{cb}, \tag{4.24}$$

d.h. g^{ac} und g_{cb} als Matrizen aufgefaßt verhalten sich invers zueinander.

Mit Hilfe des Metrischen Fundamentaltensors g_{ab} und seines Inversen g^{ab} lassen sich kovariante Größen in kontravariante umrechnen und umgekehrt. Diesen Vorgang nennt man Indexziehen.

3 Determinante

Für eine 2×2 Matrix berechnet man die Determinante wie folgt:

$$\underline{\underline{M}} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} = (M_{\alpha\beta})\,; \qquad \alpha, \beta = 1, 2 \tag{4.25}$$

$$M \equiv det\underline{\underline{M}} = det\,(M_{\alpha\beta}) = \begin{vmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{vmatrix} = M_{11}M_{22} - M_{12}M_{21} \tag{4.26}$$

Für eine 3×3 Matrix gilt:

$$\underline{\underline{M}} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{pmatrix} = (M_{ab})\,; \qquad a, b = 1, 2 \tag{4.27}$$

$$\begin{aligned} M \quad &\equiv \quad det\underline{\underline{M}} = det\,(M_{ab}) = \begin{vmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{vmatrix} \\ &= \quad M_{11} \begin{vmatrix} M_{22} & M_{23} \\ M_{32} & M_{33} \end{vmatrix} - M_{21} \begin{vmatrix} M_{12} & M_{13} \\ M_{32} & M_{33} \end{vmatrix} + M_{31} \begin{vmatrix} M_{12} & M_{13} \\ M_{22} & M_{23} \end{vmatrix} \end{aligned} \tag{4.28}$$

Eine elegante Berechnungsformel für Determinanten ist mit dem Levi-Civita-Symbol möglich.

- Bereits bekannt ist:

$$\varepsilon_{abc} = \begin{cases} 1 \\ -1 \\ 0 \end{cases} ; \quad \varepsilon_{123} = 1;\ \text{total antisymmetrisch} \tag{4.29}$$

- Wir führen ein:

$$\varepsilon^{abc} = \begin{cases} 1 \\ -1 \\ 0 \end{cases} ; \quad \varepsilon^{123} = 1;\ \text{total antisymmetrisch} \tag{4.30}$$

- analog gilt für $\alpha, \beta = 1, 2$:

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1 \\ -1 \\ 0 \end{cases} ; \quad \varepsilon_{12} = 1;\ \text{total antisymmetrisch} \tag{4.31}$$

$$\varepsilon^{\alpha\beta} = \begin{cases} 1 \\ -1 \\ 0 \end{cases} ; \quad \varepsilon^{12} = 1; \text{ total antisymmetrisch} \tag{4.32}$$

- z.B. $\varepsilon_{11} = 0,\ \varepsilon_{12} = 1,\ \varepsilon_{21} = -1,\ \varepsilon_{22} = 0$
- Zum Vergleich noch einmal das Kronecker-Symbol

$$\begin{aligned}
\delta_{ab} &= \begin{cases} 1 & a = b \\ 0 & a \neq b \end{cases} ; \text{ total symmetrisch} \\
\delta^{ab} &= \begin{cases} 1 & a = b \\ 0 & a \neq b \end{cases} ; \text{ total symmetrisch} \\
\delta^{b}_{a} &= \begin{cases} 1 & a = b \\ 0 & a \neq b \end{cases} ; \text{ total symmetrisch} \\
\delta_{\alpha\beta} &= \begin{cases} 1 & \alpha = \beta \\ 0 & \alpha \neq \beta \end{cases} ; \text{ total symmetrisch} \\
\delta^{\alpha\beta} &= \begin{cases} 1 & \alpha = \beta \\ 0 & \alpha \neq \beta \end{cases} ; \text{ total symmetrisch} \\
\delta_{\alpha^{\beta}} &= \begin{cases} 1 & \alpha = \beta \\ 0 & \alpha \neq \beta \end{cases} ; \text{ total symmetrisch}
\end{aligned}$$

Damit gilt:

$$M = \varepsilon^{\alpha\beta} M_{1\alpha} M_{2\beta} \qquad (2 \times 2) \tag{4.33}$$

$$M = \varepsilon^{abc} M_{1a} M_{2b} M_{3c} \qquad (3 \times 3) \tag{4.34}$$

Diese Vorschrift ist auch auf $(N \times N)$ Matrizen erweiterbar.

Beweis:

2×2 :

$$\begin{aligned}
\varepsilon^{\alpha\beta} M_{1\alpha} M_{2\beta} &= \varepsilon^{1\beta} M_{11} M_{2\beta} + \varepsilon^{2\beta} M_{12} M_{2\beta} \\
&= \varepsilon^{12} M_{11} M_{22} + \varepsilon^{21} M_{11} M_{21} \\
&= M_{11} M_{22} - M_{12} M_{21} = M
\end{aligned}$$

3×3 : analog

Neben den Berechnungsformeln (4.33) bzw. (4.34) sind folgende Modifikationen nützlich :

2×2 :

$$M\varepsilon_{\gamma\delta} = \varepsilon^{\alpha\beta} M_{\gamma\alpha} M_{\delta\beta}$$

bzw.

3×3 :

$$M\varepsilon_{def} = \varepsilon^{abc} M_{da} M_{eb} M_{fc}$$

Auch diese Vorschrift ist auf $(N \times N)$ Matrizen erweiterbar. Zum Beweis betrachten wir wiederum exemplarisch den 2×2 : Fall :

Für $\gamma = 1$, $\delta = 2$ folgt unmittelbar (4.33) und für diese Index-Kombination ist die Formel also korrekt!

Für $\gamma = 2$, $\delta = 1$ erzeugt $\varepsilon_{21} = -1$ auf der linken Seite einen Vorzeichenwechsel. Rechts ist dann $M_{\gamma\alpha}$ mit $M_{\delta\beta}$ zu vertauschen, um die Faktorenreihenfolge wie in (4.33) zu erhalten. Dann ist aber auch α gegen β auszutauschen, was auch rechts einen Vorzeichenwechsel erzeugt. Damit ist auch für diese Indexkonstellation die Formel korrekt.

Bei $\gamma = \delta$ wird die linke Seite Null. Die Rechts Seite ist aber auch Null, weil ein symmetrischer auf einen antisymmetrischen Ausdruck multipliziert wird. Im Vorgriff auf das nächste Kapitel bringen wir (5.35) zur Anwendung und haben damit die Gültigkeit für alle Fälle nachgewiesen.

Im 3×3 : bzw. $(N \times N)$ Fall erfolgt der Beweis analog.

4 Skalarprodukt

Das Skalarprodukt zweier Vektoren $\underline{v}$ und $\underline{w}$ im Punkt P berechnet sich zu

$$\underline{v} \cdot \underline{w} = v_a \, \underline{b}^a \cdot w^b \, \underline{b}_b \tag{4.35}$$

$$\underline{v} \cdot \underline{w} = v_a \, w^b \, \delta^a_b = v_a \, w^a \tag{4.36}$$

bzw. analog

$$\underline{v} \cdot \underline{w} = v^a \, w_a. \tag{4.37}$$

Dies kann auch geschrieben werden als

$$\underline{v} \cdot \underline{w} = v^a \, g_{ab} \, w^b = g_{ab} \, v^a \, w^b \tag{4.38}$$

bzw. analog

$$\underline{v} \cdot \underline{w} = g^{ab} \, v_a \, w_b. \tag{4.39}$$

Man beachte, daß i.a.

$$v^a \, w^a \neq \underline{v} \, \underline{w} \neq v_a \, w_a \tag{4.40}$$

gilt.

5 Vektorprodukt

Das Vektorprodukt zweier Vektoren $\underline{v}$ und $\underline{w}$ im Punkt P ist (koordinatenfrei!) definiert durch:

1. Der Betrag von $\underline{v} \times \underline{w}$ ist das Produkt der Längen von $\underline{v}$ und $\underline{w}$ und dem Sinus des eingeschlossenen Winkels.
2. $\underline{v} \times \underline{w}$ steht senkrecht auf $\underline{v}$ und $\underline{w}$, wobei $\underline{v}$, $\underline{w}$ und $\underline{v} \times \underline{w}$ ein Rechtssystem bilden.

Die Formel

$$\underline{v} \times \underline{w} = \sqrt{g} \, \varepsilon_{abc} \underline{b}^a \, v^b \, w^c \tag{4.41}$$

erfüllt gerade die Definition. Dabei ist

$$g \equiv \det(g_{ab}) \tag{4.42}$$

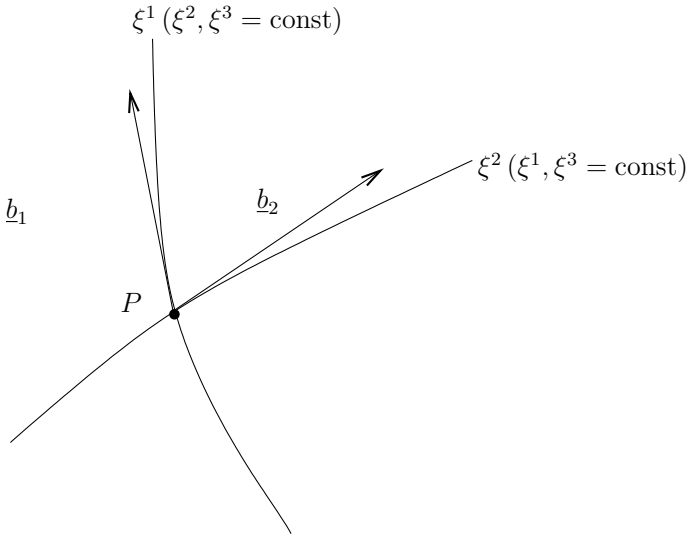
die Determinante des Metrischen Fundamentaltensors.

Wenn $\underline{v}$ und $\underline{w}$ selbst Basisvektoren sind, gilt z.B.:

$$\underline{v} = \underline{b}_1 = \delta_1^a \underline{b}_a \, , \; \underline{w} = \underline{b}_2 = \delta_2^b \underline{b}_b$$

und somit

$$\begin{aligned} \underline{b}_1 \times \underline{b}_2 &= \sqrt{g}\, \varepsilon_{abc}\, \underline{b}^a\, \delta_1^b\, \delta_2^c \\ &= \sqrt{g}\, \varepsilon_{a12}\, \underline{b}^a \\ &= \sqrt{g}\, \varepsilon_{312} \underline{b}^3 \\ \underline{b}_1 \times \underline{b}_2 &= \sqrt{g}\, \underline{b}^3 \end{aligned} \tag{4.43}$$



$\underline{b}_1 \times \underline{b}_2$ zeigt in die Ebene hinein und stimmt mit der Richtung von $\underline{b}^3$ überein.

Analog gilt

$$\underline{b}_2 \times \underline{b}_3 = \sqrt{g}\, \underline{b}^1 \tag{4.44}$$

$$\underline{b}_3 \times \underline{b}_1 = \sqrt{g}\, \underline{b}^2. \tag{4.45}$$

Weiterhin folgt

$$\begin{aligned} \underline{b}_1 \times \underline{b}_2 &= \sqrt{g}\, \underline{b}^3 \quad | \cdot \underline{b}_3 \\ \underbrace{(\underline{b}_1 \times \underline{b}_2)\, \underline{b}_3}_{\substack{\text{Spatprodukt,} \\ \text{gemischtes Produkt}}} &= \sqrt{g}\, \underline{b}^3\, \underline{b}_3 = \sqrt{g} \end{aligned} \tag{4.46}$$

sowie analoge Formeln durch zyklische Vertauschung der Indizes. Offensichtlich handelt es sich bei $\sqrt{g}$ um das Volumen des von den kovarianten Basisvektoren aufgespannten Parallelepipeds.

Es soll zur Verifikation der Formel für das Vektorprodukt noch gezeigt werden, daß das gemischte Produkt der kovarianten Basisvektoren tatsächlich die Wurzel aus der Determinante des Metrischen Fundamentaltensors ergibt. Wir benutzen dazu die Laplace-Multiplikationsregel für zwei gemischte Produkte

$$(\underline{a}_1 \times \underline{a}_2)\, \underline{a}_3 \cdot (\underline{b}_1 \times \underline{b}_2)\, \underline{b}_3 = \begin{vmatrix} \underline{a}_1 \cdot \underline{b}_1 & \underline{a}_1 \cdot \underline{b}_2 & \underline{a}_1 \cdot \underline{b}_3 \\ \underline{a}_2 \cdot \underline{b}_1 & \underline{a}_2 \cdot \underline{b}_2 & \underline{a}_2 \cdot \underline{b}_3 \\ \underline{a}_3 \cdot \underline{b}_1 & \underline{a}_3 \cdot \underline{b}_2 & \underline{a}_3 \cdot \underline{b}_3 \end{vmatrix} \tag{4.47}$$

Im Spezialfall $\underline{a}_c = \underline{b}_c$ folgt bereits

$$\{(\underline{b}_1 \times \underline{b}_2)\,\underline{b}_3\}^2 = |g_{ab}| \equiv \det(g_{ab}) \equiv g. \tag{4.48}$$

6 Differentiation in krummlinigen Koordinaten

Wir erinnern uns an die Differentialoperatoren in kartesischen Koordinaten:

- Gradient $\quad \partial_{\underline{r}}\, f = \partial_{x^1} f \underline{e}_1 + \partial_{x^2} f \underline{e}_2 + \partial_{x^3} f \underline{e}_3 = \partial_{x^a} f \underline{e}_a$
- Divergenz $\quad \partial_{\underline{r}}\, \underline{A} = \partial_{x^1} A^1 + \partial_{x^2} A^2 + \partial_{x^3} A^3 = \partial_{x^a} A^a$
- Rotation $\quad \partial_{\underline{r}} \times \underline{A} = \left(\partial_{x^2} A^3 - \partial_{x^3} A^2\right) \underline{e}_1 \ldots = \underline{e}_a \varepsilon_{abc} \partial_{x^b} A^c$
- Laplace $\quad \partial^2_{\underline{r}}\, f = \partial^2_{x^1} f + \partial^2_{x^2} f + \partial^2_{x^3} f = \partial_{x^a} \partial_{x^a} f$

Diese Ausdrücke beschreiben physikalische Sachverhalte, die auch ohne kartesische Koordinaten existieren.

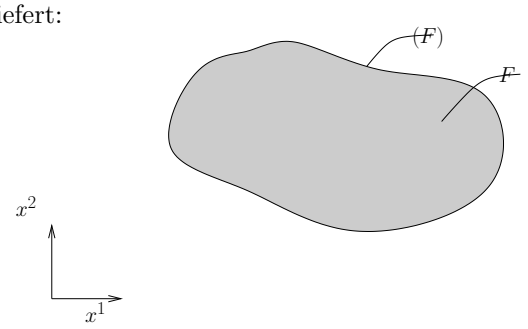
- Eine Darstellung ohne kartesische Koordinaten, also in beliebigen Koordinaten muß deshalb möglich sein.
- Eine direkte Umrechnung von kartesischen in krummlinige Koordinaten ist sehr aufwändig.

Eine erste Idee für eine koordinatenunabhängige Definition der Differentialoperatoren sei am Beispiel der Divergenz gezeigt:

- Berechnung der Divergenz über den Gauß-Satz

$$\int_V \partial_{\underline{r}}\, \underline{A}\, \mathrm{d}V = \int_{(V)} \underline{A}\, \mathrm{d}\underline{O}$$

- Der Gauß-Satz ist im Grunde koordinatenunabhängig, denn Integrale sind nicht an kartesische Koordinaten gebunden.
- Der Mittelwertsatz liefert:



$$\int_V \partial_{\underline{r}}\, \underline{A}\, \mathrm{d}V = \overline{\partial_{\underline{r}}\, \underline{A}} \int_V \mathrm{d}V \quad = \quad \overline{\partial_{\underline{r}}\, \underline{A}} V = \int_{(V)} \underline{A}\, \mathrm{d}\underline{O} \tag{4.49}$$

$$\overline{\partial_{\underline{r}}\, \underline{A}} \quad = \quad \frac{1}{V} \int_{(V)} \underline{A}\, \mathrm{d}\underline{O} \tag{4.50}$$

- Um die Divergenz im Punkt $\underline{r}$ zu erhalten, wird V um $\underline{r}$ auf diesen Punkt zusammengezogen: $\overline{\partial_{\underline{r}}\ \underline{A}} \ \rightarrow\ \partial_{\underline{r}}\ \underline{A}|_{\underline{r}}$
- Damit erhält man eine koordinatenunabhängige Definition der Divergenz:

$$\partial_{\underline{r}}\ \underline{A} = \lim_{V\to 0} \frac{1}{V} \int\limits_{(V)} \underline{A}\, \mathrm{d}\underline{O} \tag{4.51}$$

- Das Oberflächenintegral ist in beliebigen, also auch krummlinigen Koordinaten ausrechenbar.
- Die Auswertung des Oberflächenintegrals bzw. anderer Integrale für die weiteren Differentialoperatoren soll hier nicht vorgeführt werden.
- Man muss nicht in jedem Fall den Weg über Integralsätze gehen, um zu koordinatenunabhängigen Definitionen zu gelangen; $\partial_{\underline{r}}\ f$ kann z.B. auch recht elementar ohne Integrale abgeleitet werden.

6.1 Gradient

$f(\xi^1, \xi^2, \xi^3) = f(\xi^a)$ sei eine skalare Funktion: $f \mid \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^1$. In kartesischen Koordinaten gilt:

$$\partial_{\underline{r}}\ f = \partial_{x^a} f \underline{e}_a$$

Der Gradient in krummlinigen Koordinaten ergibt sich vermittels Kettenregel zu

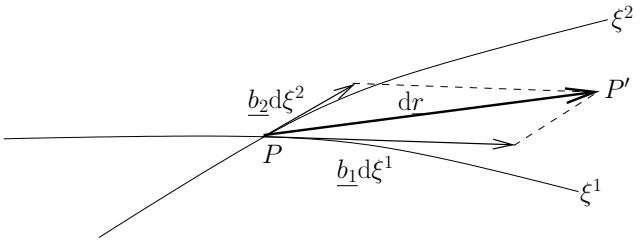
$$\partial_{\underline{r}}\ f = \partial_{\xi^a} f \frac{\partial \xi^a}{\partial \underline{r}} = \underline{b}^a \partial_{\xi^a} f \tag{4.52}$$

Dabei ist $\underline{b}^a$ die kontravariante Basis im Punkt $\underline{r}$.

Das Differential $\mathrm{d}f$ kann nach wie vor durch $\partial_{\underline{r}}\ f$ ausgedrückt werden. Zunächst schreiben wir:

$$\mathrm{d}f = \partial_{\xi^1} f\, \mathrm{d}\xi^1 + \ldots + \partial_{\xi^3} f\, \mathrm{d}\xi^3 = \partial_{\xi^a} f\, \mathrm{d}\xi^a \tag{4.53}$$

$\mathrm{d}\underline{r}$ läßt sich im Punkt $\underline{r}$ in der kovarianten Basis darstellen:



$$\mathrm{d}\underline{r} = \underline{b}_1\, \mathrm{d}\xi^1 + \ldots + \underline{b}_3\, \mathrm{d}\xi^3 = \underline{b}_c\, \mathrm{d}\xi^c \tag{4.54}$$

Dann folgt

$$\mathrm{d}f = \partial_{\underline{r}}\ f \cdot \mathrm{d}\underline{r} \tag{4.55}$$

denn

$$\begin{aligned} \mathrm{d}f &= \underline{b}^a \partial_{\xi^a} f \cdot \underline{b}_c\, \mathrm{d}\xi^c = \partial_{\xi^a} f\, \mathrm{d}\xi^c \underbrace{\underline{b}^a \underline{b}_c}_{\delta^a_c} \\ &= \partial_{\xi^a} f\, \mathrm{d}\xi^a \end{aligned}$$

6.2 Divergenz

Sei $\underline{A}$ ein Vektorfeld $\underline{A}\left(\xi^1, \xi^2, \xi^3\right)$. Wir erinnern uns an die Divergenz in kartesischen Koordinaten:

$$\partial_{\underline{r}} \, \underline{A} = \frac{\partial A^a}{\partial x^a} = \partial_{x^a} A^a \tag{4.56}$$

Wir verallgemeinern diese Definition jetzt auf krummlinige Koordinaten. Dabei muß folgendes beachtet werden:

- Die physikalische Bedeutung der Divergenz als Quellstärke muß beibehalten werden.
- Die Relation (4.56) muss erhalten bleiben.

Die folgende hier ohne Beweis präsentierte Formel leistet dies:

$$\partial_{\underline{r}} \, \underline{A} = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_{\xi^a} \left(\sqrt{g} A^a\right) \tag{4.57}$$

- A^a sind die kontravarianten Komponenten von $\underline{A}$, also gilt $\underline{A} = A^a \underline{b}_a$
- $g = det(g_{ab})$

Für kartesische Koordinaten entsteht die richtige Lösung:

- $g_{ab} = \delta_{ab} \quad \curvearrowright \; g = 1$
- $\partial_{\underline{r}} \, \underline{A} = \partial_{\xi^a} A^a = \partial_{x^a} A^a$

6.3 Rotation

Sei $\underline{A}$ ein Vektorfeld $\underline{A}\left(\xi^1, \xi^2, \xi^3\right)$. Wir erinnern uns an die Rotation in kartesischen Koordinaten:

$$\partial_{\underline{r}} \times \, \underline{A} = \underline{e}_a \varepsilon_{abc} \partial_{x^b} A^c \tag{4.58}$$

Wir verallgemeinern diese Definition jetzt auf krummlinige Koordinaten. Dabei muß folgendes beachtet werden:

- Die physikalische Bedeutung der Rotation als Wirbelstärke muß beibehalten werden.
- Die Relation (4.58) muss erhalten bleiben.

Die folgende hier ohne Beweis präsentierte Formel leistet dies:

$$\partial_{\underline{r}} \times \, \underline{A} = \frac{1}{\sqrt{g}} \varepsilon^{abc} \underline{b}_a \partial_{\xi^b} A_c \tag{4.59}$$

- A_c sind die kovarianten Komponenten von $\underline{A}$, also gilt $\underline{A} = A_c \underline{b}^c$
- $g = det(g_{ab})$

Für kartesische Koordinaten entsteht die richtige Lösung:

$$\begin{aligned}\partial_{\underline{r}} \times \underline{A} &= \tfrac{1}{\sqrt{g}}\varepsilon^{abc}\tfrac{\partial A_c}{\partial \xi^b}\underline{e}_a \\ &\downarrow \\ &= \varepsilon^{abc}\tfrac{\partial A_c}{\partial x^b}\underline{e}_a \\ &= \varepsilon_{abc}\tfrac{\partial A_c}{\partial x^b}\underline{e}_a \\ &= \underline{e}_a\varepsilon_{abc}\partial_{x^b}A^c.\end{aligned}$$

6.4 Laplace-Operator

$\Delta f = \partial^2_{\underline{r}}\, f$

- $\partial_{\underline{r}}\, f = \underline{b}^a \partial_{\xi^a} f$
- $\partial_{\underline{r}}\, \underline{A} = \frac{1}{\sqrt{g}}\partial_{\xi^c}\left(\sqrt{g}A^c\right)$ mit $\underline{A} = A^c\underline{b}_c$

Es tritt jetzt ein Problem auf, da $\partial_{\underline{r}}\, f$ in der kontravarianten Basis dargestellt ist, für die Divergenz aber eine Darstellung in der kovarianten Basis erforderlich ist.

Durch Indexziehen lassen sich die Darstellungen ineinander umrechnen:

$$\underline{b}^a = g^{ab}\underline{b}_b \tag{4.60}$$

$$\curvearrowright \quad \partial_{\underline{r}}\, f = g^{ab}\partial_{\xi^a} f\, \underline{b}_b \tag{4.61}$$

$$\text{vgl.} \quad \underline{A} = A^b \quad \underline{b}_b$$

$$\partial_{\underline{r}}\, \underline{A} = \frac{1}{\sqrt{g}}\partial_{\xi^b}\left(\sqrt{g}A^b\right) \tag{4.62}$$

$$\partial^2_{\underline{r}} f = \frac{1}{\sqrt{g}}\partial_{\xi^b}\left(\sqrt{g}g^{ab}\partial_{\xi^a} f\right) \tag{4.63}$$

Bemerkung: Prinzip des richtigen Indexbildes

- Der Indexkalkül ist so konstruiert, daß links und rechts einer Gleichung das gleiche Indexbild auftreten muß:

$$(\ldots)^a = (\ldots)^a \tag{4.64}$$

$$(\ldots)^a_{bc} = (\ldots)^a_{bc} \tag{4.65}$$

- Gleiche Indizes befinden sich auf gleichem Niveau:

  kovariant $\hat{=}$ subscript
  kontravariant $\hat{=}$ superscript

  Summationsindizes sind "gesättigte Indizes" im Unterschied zu den "freien Indizes". Summationsindizes sind daher nicht mitzuzählen. Zu summieren ist immer über ein kovariant-kontravariantes Paar:

$$(\ldots)^{ab}_b = (\ldots)^a \tag{4.66}$$

- Ein oberer Index im Nenner entspricht einem unteren Index:

$$\frac{\partial}{\partial \xi^a}A^{bc} = B^{bc}_a \;;\; \frac{\partial}{\partial \xi^a}A^{ab} = B^b \tag{4.67}$$

7 Orthogonale Koordinaten

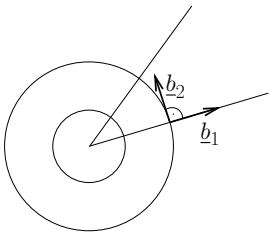
Definition von orthogonalen Koordinaten:

Wenn in jedem Punkt des Raumes

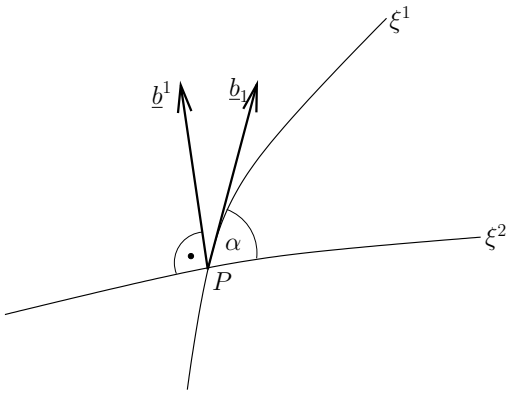
$$\underline{b}_a \cdot \underline{b}_b = 0 \text{ für } a \neq b \tag{4.68}$$

gilt, dann heißen die Koordinaten orthogonal.

Beispiel: 2-dim Polarkoordinaten; $\xi^1 = \rho, \xi^2 = \varphi$



Es wurde bereits festgestellt, daß für senkrecht aufeinanderstehende Koordinatenlinien $\underline{b}_a \| \underline{b}^a$ gilt; verdeutlicht ist dies nochmals im Bild. Man vollziehe den Übergang $\alpha \to 90$:



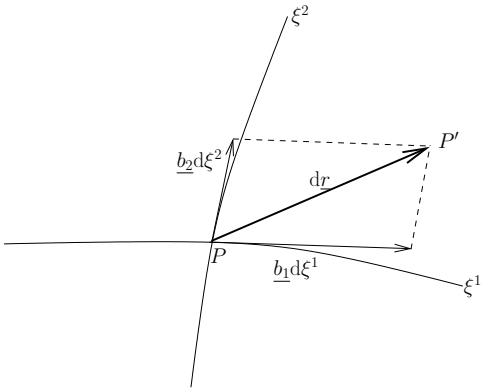
Der Metrische Fundamentaltensor geht für orthogonale Koordinaten in Diagonalform über, da

$$g_{ab} = \underline{b}_a \underline{b}_b = 0 \quad \text{für } a \neq b \tag{4.69}$$

gilt. Man schreibt dann:

$$(g_{ab}) = \begin{pmatrix} (h_1)^2 & 0 & 0 \\ 0 & (h_2)^2 & 0 \\ 0 & 0 & (h_3)^2 \end{pmatrix} \tag{4.70}$$

Warum schreibt man die Diagonalelemente als quadratische Terme?



P : ξ^1, ξ^2, ξ^3
P' : $\xi^1 + \mathrm{d}\xi^1, \xi^2 + \mathrm{d}\xi^2, \xi^3 + \mathrm{d}\xi^3$
$\mathrm{d}\xi^a$: Koordinatendifferentiale

$$\mathrm{d}\underline{r} = \frac{\partial \underline{r}}{\partial \xi^a}\,\mathrm{d}\xi^a = \underline{b}_a\,\mathrm{d}\xi^a \tag{4.71}$$

$$\curvearrowright \mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}\underline{r}\cdot\mathrm{d}\underline{r} = \underline{b}_a\,\mathrm{d}\xi^a \cdot \underline{b}_b\,\mathrm{d}\xi^b \tag{4.72}$$

$\mathrm{d}s^2$ ist das Quadrat des Differentials der Bogenlänge und wird auch Linienelement genannt. Das Linienelement ist eine sehr gebräuchliche Größe!

Aus der Metrischen Fundamentalgleichung

$$\mathrm{d}s^2 = g_{ab}\,\mathrm{d}\xi^a\,\mathrm{d}\xi^b \tag{4.73}$$

ergibt sich:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}s^2 &= g_{11}\left(\mathrm{d}\xi^1\right)^2 + g_{22}\left(\mathrm{d}\xi^2\right)^2 + g_{33}\left(\mathrm{d}\xi^3\right)^2\\ \mathrm{d}s^2 &= \underline{b}_1\cdot\underline{b}_1\left(\mathrm{d}\xi^1\right)^2 + \underline{b}_2\cdot\underline{b}_2\left(\mathrm{d}\xi^2\right)^2 + \underline{b}_3\cdot\underline{b}_3\left(\mathrm{d}\xi^3\right)^2\end{aligned}$$

Es liegt nun nahe

$$\mathrm{d}s^2 = \left(h_1\,\mathrm{d}\xi^1\right)^2 + \left(h_2\,\mathrm{d}\xi^2\right)^2 + \left(h_3\,\mathrm{d}\xi^3\right)^2 \tag{4.74}$$

zu schreiben und damit die Diagonalelemente von g_{ab} als Quadrate zu schreiben.

Die weiteren Überlegungen sind mit der Summenkonvention nicht mehr praktisch aufschreibbar, deshalb wird diese bis auf weiteres aufgehoben.

$$\mathrm{d}s^2 = \sum_a h_a^2\left(\mathrm{d}\xi^a\right) \tag{4.75}$$

Das Indexziehen in orthogonalen Koordinaten arbeitet dann wie folgt:

$$\underline{b}_a = \sum_b g_{ab}\underline{b}^b = \left(h_a^2\right)^2\underline{b}^a \tag{4.76}$$

$$\underline{b}^a = \frac{1}{\left(h_a\right)^2}\underline{b}_a \tag{4.77}$$

klar, da $\underline{b}^a \| \underline{b}_a$

Da $\{\underline{b}_a\}$ und $\{\underline{b}^a\}$ Orthogonalbasen bilden, liegt es nahe sie noch in Orthonormalbasen zu überführen. $\underline{b}_a$ und $\underline{b}^a$ sind zwar parallel, haben aber i.a. unterschiedliche Längen. $\underline{b}_a$ und $\underline{b}^a$ können auf die Länge 1 normiert werden. Die normierten $\underline{b}_a$ und $\underline{b}^a$ sind dann gleich, da sie die gleiche Länge haben und parallel sind.

Wir führen jetzt neue Basen ein:

$$\hat{\underline{b}}_a \equiv \frac{1}{h_a}\underline{b}_a \tag{4.78}$$

$$\hat{\underline{b}}^a \equiv h_a\underline{b}^a \tag{4.79}$$

Folglich gilt

$$\begin{aligned} \hat{\underline{b}}_a &= \frac{1}{h_a} h_a^2 \underline{b}^a = h_a \underline{b}^a = \hat{\underline{b}}^a \\ \hat{\underline{b}}_a &= \hat{\underline{b}}^a \end{aligned} \tag{4.80}$$

sowie

$$\hat{\underline{b}}_a \hat{\underline{b}}_a = \frac{1}{h_a} \underline{b}_a \cdot h_a \underline{b}^a = \underline{b}_a \underline{b}^a = 1 \tag{4.81}$$

$$\curvearrowright \quad |\hat{\underline{b}}_a| = 1 = |\hat{\underline{b}}^a| \tag{4.82}$$

$\left\{\hat{\underline{b}}_a\right\} = \left\{\hat{\underline{b}}^a\right\}$ ist also eine normierte Basis orthogonaler Koordinaten. Die normierte kovariante und die normierte kontravariante Basis sind gleich!

Orthogonale Koordinaten sind von hervorgehobener praktischer Bedeutung. Die in der Physik gebräuchlichsten Koordinaten sind orthogonal.

- Kartesische Koordinaten $\xi^1 = x^1,\ \xi^2 = x^2,\ \xi^3 = x^3$
- Zylinderkoordinaten $\xi^1 = \rho,\ \xi^2 = \varphi,\ \xi^3 = z$
- Kugelkoordinaten $\xi^1 = r,\ \xi^2 = \vartheta,\ \xi^3 = \varphi$

In orthogonalen Koordinaten nehmen die Differentialoperatoren einfache Formen an, die in den folgenden Abschnitten dargestellt werden.

7.1 Gradient

Wir erinnern uns an den Gradienten in allgemeinen krummlinigen Koordinaten

$$\partial_{\underline{r}}\, f = \sum_a \underline{b}^a \partial_{\xi^a} f$$

Wir stellen den Gradienten jetzt in normierten orthogonalen Koordinaten dar.

$$\hat{\underline{b}}^a = h_a \underline{b}^a$$

$$\partial_{\underline{r}}\, f = \sum_a \hat{\underline{b}}^a \frac{1}{h_a} \partial_{\xi^a} f \tag{4.83}$$

Die a-te Komponente ist

$$\left(\partial_{\underline{r}}\right)_a f = \frac{1}{h_a} \partial_{\xi^a} f \tag{4.84}$$

7.2 Divergenz

Wir erinnern uns an die Divergenz in allgemeinen krummlinigen Koordinaten

$$\partial_{\underline{r}}\, \underline{A} = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_a \partial_{\xi^a} \left(\sqrt{g} A^a\right)$$

Fr eine orthogonale Basis gilt

$$g = h_1^2 h_2^2 h_3^2 \tag{4.85}$$

$$\sqrt{g} = h_1 h_2 h_3 \tag{4.86}$$

Die Darstellung des Vektorfeldes $\underline{A}$ in kovarianter Basis ergibt

$$\underline{A} = \sum_a A^a \underline{b}_a \tag{4.87}$$

(4.87) wird jetzt auf die normierte Basis umgerechnet

$$\begin{aligned}
\underline{A} &= \sum_a \hat{A}^a \hat{\underline{b}}_a \\
\hat{A}^a &= \hat{A}_a, \qquad \text{da } \hat{\underline{b}}_a = \hat{\underline{b}}^a \\
\hat{\underline{b}}_a &= \frac{1}{h_a} \underline{b}_a \\
\curvearrowright \underline{A} &= \sum_a \hat{A}^a \frac{1}{h^a} \underline{b}_a \qquad (4.88) \\
\curvearrowright A^a &= \frac{\hat{A}^a}{h^a} \qquad (4.89)
\end{aligned}$$

$$\curvearrowright \partial_{\underline{r}} \, \underline{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \sum_a \partial_{\xi^a} \left(\frac{h_1 h_2 h_3}{h_a} \hat{A}^a \right) \tag{4.90}$$

$$\partial_{\underline{r}} \, \underline{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left\{ \partial_{\xi^1} \left(h_2 h_3 \hat{A}^1 \right) + \partial_{\xi^2} \left(h_1 h_3 \hat{A}^2 \right) + \partial_{\xi^3} \left(h_1 h_2 \hat{A}^3 \right) \right\} \tag{4.91}$$

7.3 Rotation

Wir erinnern uns an die Rotation in allgemeinen krummlinigen Koordinaten

$$\partial_{\underline{r}} \times \, \underline{A} = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_a \sum_b \sum_c \varepsilon^{abc} \underline{b}_a \partial_{\xi^b} A_c$$

Für eine orthogonale Basis gilt

$$\sqrt{g} = h_1 h_2 h_3 \tag{4.92}$$

Die Darstellung des Vektorfeldes $\underline{A}$ in kontravarianter Basis ergibt

$$\underline{A} = \sum_c A^c \underline{b}_c \tag{4.93}$$

(4.93) wird jetzt auf die normierte Basis umgerechnet

$$\begin{aligned}
\underline{A} &= \sum_c \hat{A}_c \hat{\underline{b}}^c \\
\hat{\underline{b}}^c &= h_c \underline{b}^c = \frac{\underline{b}_c}{h_c} = \hat{\underline{b}}_c \qquad (4.94) \\
\curvearrowright \underline{A} &= \sum_c \hat{A}_c h_c \underline{b}^c \qquad (4.95) \\
\curvearrowright A_c &= \hat{A}_c h_c \qquad (4.96)
\end{aligned}$$

$$\curvearrowright \partial_{\underline{r}} \times \, \underline{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \sum_a \sum_b \sum_c \varepsilon^{abc} \hat{\underline{b}}_a h_a \partial_{\xi^b} \left(h_c \hat{A}_c \right) \tag{4.97}$$

Die einzenen Komponenten von $\partial_{\underline{r}} \times \underline{A}$ sind dann

$$a = 1: \qquad \left(\partial_{\underline{r}} \times \underline{A}\right)_1 = \frac{1}{h_2 h_3}\left\{\partial_{\xi^2}\left(h_3 \hat{A}_3\right) - \partial_{\xi^3}\left(h_2 \hat{A}_2\right)\right\} \tag{4.98}$$

$$a = 2, 3 \qquad \text{durch zyklische Vertauschung!} \tag{4.99}$$

7.4 Laplace-Operator

Wir erinnern uns an den Laplace-Operator in allgemeinen krummlinigen Koordinaten

$$\partial^2_{\underline{r}}\, f = \sum_a \sum_b \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_{\xi^b}\left(\sqrt{g} g^{ab} \partial_{\xi^a} f\right)$$

Für eine orthogonale Basis folgt

$$\sqrt{g} = h_1 h_2 h_3 \tag{4.100}$$

$$\left(g^{ab}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{h_1^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{h_2^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{h_3^2} \end{pmatrix} \quad \text{(inverser Fundamentaltensor)} \tag{4.101}$$

Der Laplace-Operator nimmt dann folgende Form an:

$$\partial^2_{\underline{r}} f = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \sum_a \partial_{\xi^a}\left(\frac{h_1 h_2 h_3}{h_a^2} \partial_{\xi^a} f\right) \tag{4.102}$$

$$\partial^2_{\underline{r}} f = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left\{\partial_{\xi^1}\left(\frac{h_2 h_3}{h_1}\partial_{\xi^1} f\right) + \partial_{\xi^2}\left(\frac{h_1 h_3}{h_2}\partial_{\xi^2} f\right) + \partial_{\xi^3}\left(\frac{h_1 h_2}{h_3}\partial_{\xi^3} f\right)\right\} \tag{4.103}$$

Bemerkung: Im Script "Elektrodynamik", Abschnitt 5.2 ist die Ableitung der Differentialoperatoren über die Integralsätze vorgeführt und zwar gerade für orthogonale Koordinaten!

8 Spezielle Koordinatensyteme

In diesem Abschnitt werden die besonders häufig verwendeten Fälle von krummlinigen Koordinaten (Zylinder- und Kugelkoordinaten) als Spezialfälle orthogonaler Koordinaten behandelt. Auch ihr Zusammenhang mit den kartesischen Koordinaten und die nötigen Koordinatentransformationen werden behandelt.

Die Berechnung des Metrischen Fundamentaltensors erfolgt am effizientesten nicht komponentenweise mittels Definition, sondern durch Ablesen der Komponenten aus der Metrischen Fundamentalgleichung.

$$\mathrm{d}s^2 = \sum_a \sum_b g_{ab} \mathrm{d}\xi^a\, \mathrm{d}\xi^b \qquad (allgemein) \tag{4.104}$$

bzw.

$$\mathrm{d}s^2 = \sum_a \left(h_a\right)^2 \left(\mathrm{d}\xi^a\right)^2 \qquad (orthogonal) \tag{4.105}$$

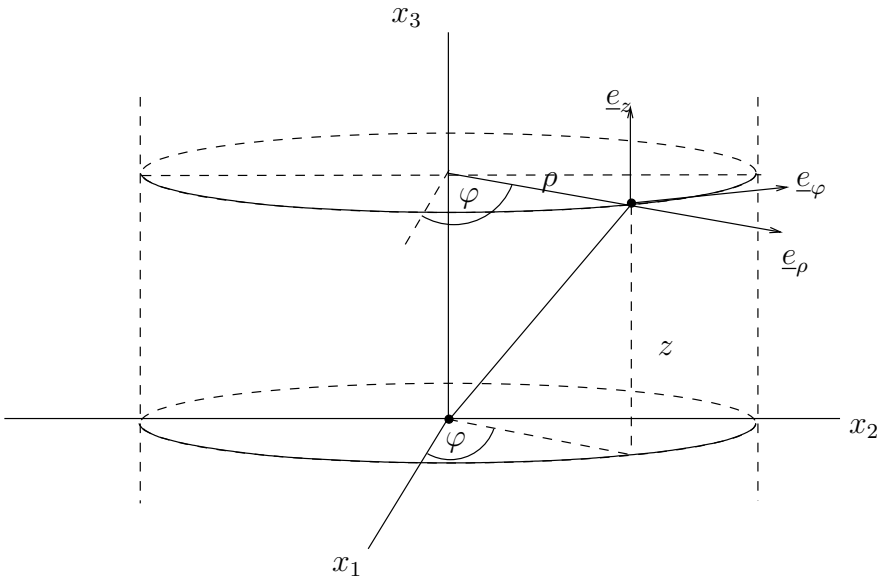
Zusätzlich soll angenommen werden, daß der jeweils betrachtete Punkt $P:\ \xi^1, \xi^2, \xi^3$ im Raum mit der Zeit veränderlich sei, also gilt:

$$P(t):\ \xi^1(t), \xi^2(t), \xi^3(t) \tag{4.106}$$

$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$ ist dann als Geschwindigkeit zu interpretieren und $\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2}$ als Beschleunigung. Darstellungen für Geschwindigkeit und Beschleunigung sollen ebenfalls bestimmt werden.

8.1 Zylinderkoordinaten

$\xi^1 = \rho\,,\ \xi^2 = \varphi\,,\ \xi^3 = z$



Der Zusammenhang mit den kartesischen Koordinaten ist gegeben durch

$$\begin{aligned} x^1 &= \rho\cos\varphi \\ x^2 &= \rho\sin\varphi \quad rcl \\ x^3 &= z. \end{aligned} \tag{4.107}$$

Die Differentiale berechnen sich zu

$$\begin{aligned} \mathrm{d}x^1 &= \cos\varphi\,\mathrm{d}\rho - \rho\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi \\ \mathrm{d}x^2 &= \sin\varphi\,\mathrm{d}\rho + \rho\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi \\ \mathrm{d}x^3 &= \mathrm{d}z. \end{aligned} \tag{4.108}$$

Es ergibt sich die Metrische Fundamentalgleichung über

$$\mathrm{d}\underline{r} = \sum_a \mathrm{d}x^a \underline{e}_a = \sum_a \mathrm{d}\xi^a \underline{b}_a = \sum_a \mathrm{d}\xi^a h_a \hat{\underline{b}}_a$$

zu

$$\mathrm{d}\underline{r}\cdot\mathrm{d}\underline{r} = ds^2 = \sum_a (\mathrm{d}x_a)^2 = \mathrm{d}\rho^2 + \rho^2\,\mathrm{d}\varphi^2 + \mathrm{d}z^2. \tag{4.109}$$

Hieraus ist abzulesen

$$h_1 = 1 \quad h_2 = \rho \quad h_3 = 1 \quad . \tag{4.110}$$

Die normierten Basisvektoren $\hat{\underline{b}}_a$ des Zylinder-Koordinatensystems benennen wir zu

$$\hat{\underline{b}}_1 \equiv \underline{e}_\rho, \quad \hat{\underline{b}}_2 \equiv \underline{e}_\varphi, \quad \hat{\underline{b}}_3 \equiv \underline{e}_z. \tag{4.111}$$

Die Basisvektoren und ihre Ableitungen ergeben sich aus

$$\mathrm{d}\underline{r} = \mathrm{d}x^1\underline{e}_1 + \mathrm{d}x^2\underline{e}_2 + \mathrm{d}x^3\underline{e}_3 = \mathrm{d}\rho\underline{e}_\rho + \mathrm{d}\varphi\rho\underline{e}_\varphi + \mathrm{d}z\underline{e}_z \tag{4.112}$$

zu

$$\begin{aligned} \underline{e}_\rho &= \frac{\partial \underline{r}}{\partial \rho} = \cos\varphi\, \underline{e}_1 + \sin\varphi \underline{e}_2 \\ \underline{e}_\varphi &= \frac{1}{\rho}\frac{\partial \underline{r}}{\partial \varphi} = -\sin\varphi\, \underline{e}_1 + \cos\varphi\, \underline{e}_2 \\ \underline{e}_z &= \frac{\partial \underline{r}}{\partial z} = \underline{e}_3 \end{aligned} \tag{4.113}$$

Wie man sieht gilt:

$$\underline{e}_\varphi = \frac{\partial \underline{e}_\rho}{\partial \varphi} \tag{4.114}$$

Die Ableitungen ergeben sich zu

$$\begin{aligned} \dot{\underline{e}}_\rho &= -\sin\varphi\,\dot\varphi\, \underline{e}_1 + \cos\varphi\,\dot\varphi\, \underline{e}_2 = \dot\varphi\, \underline{e}_\varphi \\ \dot{\underline{e}}_\varphi &= -\cos\varphi\,\dot\varphi\, \underline{e}_1 - \sin\varphi\,\dot\varphi\, \underline{e}_2 = -\dot\varphi\, \underline{e}_\rho \\ \dot{\underline{e}}_z &= 0. \end{aligned} \tag{4.115}$$

Für die Geschwindigkeit folgt

$$\frac{d\underline{r}}{\mathrm{d}t} = \underline{v} = \dot\rho\, \underline{e}_\rho + \dot\varphi\rho \underline{e}_\varphi + \dot z \underline{e}_z \tag{4.116}$$

und für die Beschleunigung

$$\begin{aligned} \partial_{\underline{r}}\, f \underline{v} t = \underline{a} &= \ddot\rho \underline{e}_\rho + \dot\rho \dot{\underline{e}}_\rho + (\ddot\varphi\rho + \dot\varphi\dot\rho)\, \underline{e}_\varphi + \dot\varphi\rho \dot{\underline{e}}_\varphi + \ddot z\, \underline{e}_z \\ \underline{a} &= \left(\ddot\rho - \rho\dot\varphi^2\right) \underline{e}_\rho + (\ddot\varphi\rho + 2\dot\varphi\dot\rho)\underline{e}_\varphi + \ddot z\, \underline{e}_z. \end{aligned} \tag{4.117}$$

Der Gradient berechnet sich zu

$$\begin{aligned} \partial_{\underline{r}}\, f &= \sum_a \frac{1}{h_a} \partial_{\xi^a} f \cdot \hat{\underline{b}}^a \\ \partial_{\underline{r}}\, f &= \partial_\rho f \underline{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\partial_\varphi f \underline{e}_\varphi + \partial_z f \underline{e}_z \end{aligned} \tag{4.118}$$

Die Divergenz berechnet sich zu

$$\begin{aligned} \partial_{\underline{r}}\, \underline{A} &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left\{\partial_{\xi^1}\left(h_2 h_3 \hat A^1\right) + \partial_{\xi^2}\left(h_1 h_3 \hat A^2\right) + \partial_{\xi^3}\left(h_1 h_2 \hat A^3\right)\right\} \\ \partial_{\underline{r}}\, \underline{A} &= \frac{1}{\rho}\left\{\partial_\rho\left(\rho \hat A^1\right) + \partial_\varphi \hat A^2 + \partial_z\left(\rho \hat A^3\right)\right\} \\ \partial_{\underline{r}}\, \underline{A} &= \frac{1}{\rho}\partial_\rho\left(\rho \hat A^1\right) + \frac{1}{\rho}\partial_\varphi \hat A^2 + \partial_z \hat A^3 \end{aligned} \tag{4.119}$$

Die Rotation berechnet sich zu

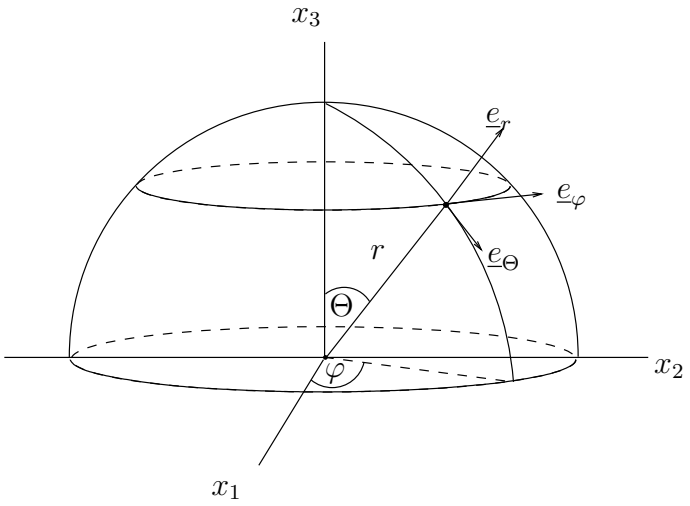
$$\begin{aligned} \left(\partial_{\underline{r}} \times \underline{A}\right)_1 &= \frac{1}{h_2 h_3}\left\{\partial_{\xi^2}\left(h_3 \hat A_3\right) - \partial_{\xi^3}\left(h_2 \hat A_3\right)\right\} \quad \text{und zyklisch} \\ \left(\partial_{\underline{r}} \times \underline{A}\right)_1 &= \frac{1}{\rho}\left\{\partial_\varphi \hat A_3 - \partial_z\left(\rho \hat A_2\right)\right\} = \frac{1}{\rho}\partial_\varphi \hat A_3 - \partial_z \hat A_2 \qquad (4.120) \\ \left(\partial_{\underline{r}} \times \underline{A}\right)_2 &= \left\{\partial_z \hat A_1 - \partial_\rho \hat A_3\right\} \qquad (4.121) \\ \left(\partial_{\underline{r}} \times \underline{A}\right)_3 &= \frac{1}{\rho}\left\{\partial_\rho\left(\rho \hat A_2\right) - \partial_\varphi \hat A_1\right\} = \frac{1}{\rho}\partial_\rho\left(\rho \hat A_2\right) - \frac{1}{\rho}\partial_\varphi \hat A_1 \qquad (4.122) \end{aligned}$$

Der Laplace-Operator berechnet sich zu

$$\begin{aligned} \partial^2_{\underline{r}}\, f &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\sum_a \partial_{\xi^a}\left(\frac{h_1 h_2 h_3}{h_a^2}\partial_{\xi^a} f\right) \\ \partial^2_{\underline{r}}\, f &= \frac{1}{\rho}\left\{\partial_\rho\left(\rho \partial_\rho f\right) + \partial_\varphi\left(\frac{1}{\rho}\partial_\varphi f\right) + \partial_z\left(\rho \partial_z f\right)\right\} \\ \partial^2_{\underline{r}}\, f &= \frac{1}{\rho}\partial_\rho\left(\rho \partial_\rho f\right) + \frac{1}{\rho^2}\partial^2_\varphi f + \partial^2_z f \end{aligned} \tag{4.123}$$

8.2 Kugelkoordinaten

$\xi^1 = r\ ,\ \xi^2 = \vartheta\ ,\ \xi^3 = \varphi$



Der Zusammenhang mit den kartesischen Koordinaten ist gegeben durch

$$\begin{aligned} x^1 &= r\,\sin\vartheta\,\cos\varphi \\ x^2 &= r\,\sin\vartheta\,\sin\varphi \\ x^3 &= r\,\cos\vartheta. \end{aligned} \tag{4.124}$$

Die Differentiale berechnen sich zu

$$\begin{aligned} \mathrm{d}x^1 &= \sin\vartheta\,\cos\varphi\,\mathrm{d}r + r\cos\vartheta\cos\varphi\,\mathrm{d}\vartheta - r\sin\vartheta\,\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi \\ \mathrm{d}x^2 &= \sin\vartheta\,\sin\varphi\,\mathrm{d}r + r\cos\vartheta\sin\varphi\,\mathrm{d}\vartheta + r\sin\vartheta\,\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi \\ \mathrm{d}x^3 &= \cos\vartheta\,\mathrm{d}r - r\,\sin\vartheta\mathrm{d}\vartheta. \end{aligned} \tag{4.125}$$

Es ergibt sich die Metrische Fundamentalgleichung zu

$$\mathrm{d}s^2 = \sum_a (\mathrm{d}x_a)^2 = \mathrm{d}r^2 + r^2\,\mathrm{d}\vartheta^2 + r^2\sin^2\vartheta\,\mathrm{d}\varphi^2. \tag{4.126}$$

Hieraus ist abzulesen

$$h_1 = 1 \quad , \quad h_2 = r \quad , \quad h_3 = r\,\sin\vartheta. \tag{4.127}$$

Die normierten Basisvektoren $\hat{\underline{b}}_1 \equiv \underline{e}_r\ ,\ \hat{\underline{b}}_2 = \underline{e}_\vartheta\ ,\ \hat{\underline{b}}_3 = \underline{e}_\varphi$ ergeben sich aus

$$\mathrm{d}\underline{r} = \mathrm{d}x^1\underline{e}_1 + \mathrm{d}x^2\underline{e}_2 + \mathrm{d}x^3\underline{e}_3 = \mathrm{d}r\underline{e}_r + \mathrm{d}\vartheta\,r\underline{e}_\vartheta + \mathrm{d}\varphi\,r\sin\vartheta\,\underline{e}_\varphi \tag{4.128}$$

zu

$$\begin{aligned} \underline{e}_r &= \frac{\partial\underline{r}}{\partial r} = \sin\vartheta\,\cos\varphi\,\underline{e}_1 + \sin\vartheta\,\sin\varphi\,\underline{e}_2 + \cos\vartheta\underline{e}_3 \quad \text{(radial gerichtet)} \\ \underline{e}_\vartheta &= \tfrac{1}{r}\frac{\partial\underline{r}}{\partial\vartheta} = \cos\vartheta\,\cos\varphi\,\underline{e}_1 + \cos\vartheta\,\sin\varphi\underline{e}_2 - \sin\vartheta\,\underline{e}_3 \quad \text{(meridional gerichtet)} \\ \underline{e}_\varphi &= \tfrac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial\underline{r}}{\partial\varphi} = -\sin\varphi\,\underline{e}_1 + \cos\varphi\underline{e}_2 \quad \text{(entlang des Breitenkreises gerichtet)} \end{aligned} \tag{4.129}$$

Man sieht, daß folgende Relationen gelten:

$$\underline{e}_\vartheta = \frac{\partial\underline{e}_r}{\partial\vartheta}\ , \quad \underline{e}_\varphi = \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial\underline{e}_r}{\partial\varphi} \tag{4.130}$$

Die Ableitungen ergeben sich zu

$$\begin{aligned}
\dot{\underline{e}}_r &= \left(\cos\vartheta\,\cos\varphi\,\dot{\vartheta} - \sin\vartheta\,\sin\varphi\,\dot{\varphi}\right)\underline{e}_1 \\
&\quad + \left(\cos\vartheta\,\sin\varphi\,\dot{\vartheta} + \sin\vartheta\,\cos\varphi\dot{\varphi}\right)\underline{e}_2 \\
&\quad - \sin\vartheta\,\dot{\vartheta}\underline{e}_3 \\
&= \dot{\vartheta}\underline{e}_\vartheta + \dot{\varphi}\sin\vartheta\,\underline{e}_\varphi \\
\dot{\underline{e}}_\vartheta &= -\sin\vartheta\,\cos\varphi\,\dot{\vartheta}\underline{e}_1 - \cos\vartheta\,\sin\varphi\,\dot{\varphi}\underline{e}_1 \\
&\quad - \sin\vartheta\,\sin\varphi\,\dot{\vartheta}\underline{e}_2 + \cos\vartheta\,\cos\varphi\,\dot{\varphi}\underline{e}_2 \\
&\quad - \cos\vartheta\,\dot{\vartheta}\underline{e}_3 \\
&= -\dot{\vartheta}\underline{e}_r + \dot{\varphi}\cos\vartheta\,\underline{e}_\varphi \\
\dot{\underline{e}}_\varphi &= -\cos\varphi\,\dot{\varphi}\,\underline{e}_1 - \sin\varphi\,\dot{\varphi}\underline{e}_2 \\
&= -\dot{\varphi}\,\sin\vartheta\,\underline{e}_r - \dot{\varphi}\,\cos\vartheta\,\underline{e}_\vartheta.
\end{aligned} \tag{4.131}$$

Für die Geschwindigkeit folgt

$$\partial_{\underline{r}}\, f\underline{r}t = \underline{v} = \dot{r}\underline{e}_r + \dot{\vartheta}r\underline{e}_\vartheta + \dot{\varphi}r\sin\vartheta\,\underline{e}_\varphi \tag{4.132}$$

und für die Beschleunigung

$$\begin{aligned}
\partial_{\underline{r}}\, f\underline{v}t = \underline{a} &= \ddot{r}\underline{e}_r + \mathrm{d}_t\left(\dot{\vartheta}r\right)\underline{e}_\vartheta + \mathrm{d}_t\left(\dot{\varphi}r\sin\vartheta\right)\underline{e}_\varphi \\
&\quad + \dot{r}\dot{\underline{e}}_r + \dot{\vartheta}r\dot{\underline{e}}_\vartheta + \dot{\varphi}r\sin\vartheta\,\dot{\underline{e}_\varphi} \qquad (4.133) \\
\underline{a} &= \ddot{r}\underline{e}_r + \mathrm{d}_t\left(\dot{\vartheta}r\right)\underline{e}_\vartheta + \mathrm{d}_t\left(\dot{\varphi}r\sin\vartheta\right)\underline{e}_\varphi \\
&\quad + \dot{r}\left(\dot{\vartheta}\underline{e}_\vartheta + \dot{\varphi}\sin\vartheta\,\underline{e}_\varphi\right) + \dot{\vartheta}r\left(-\dot{\vartheta}\underline{e}_r + \dot{\varphi}\cos\vartheta\,\underline{e}_\varphi\right) \qquad (4.134) \\
&\quad + \dot{\varphi}r\sin\vartheta\,\left(-\dot{\varphi}\sin\vartheta\,\underline{e}_r - \dot{\varphi}\cos\vartheta\,\underline{e}_\vartheta\right) \\
\underline{a} &= \left(\ddot{r} - \dot{\vartheta}^2 r - \dot{\varphi}^2 r\sin^2\vartheta\right)\underline{e}_r \\
&\quad + \left(\mathrm{d}_t\left(\dot{\vartheta}r\right) + \dot{r}\dot{\vartheta} - \dot{\varphi}^2 r\cos\vartheta\,\sin\vartheta\right)\underline{e}_\vartheta \qquad (4.135) \\
&\quad + \left(\mathrm{d}_t\left(\dot{\varphi}r\sin\vartheta\right) + \dot{r}\dot{\varphi}\sin\vartheta + \dot{\vartheta}\dot{\varphi}r\cos\vartheta\right)\underline{e}_\varphi \\
\underline{a} &= \left(\ddot{r} - \dot{\vartheta}^2 r - \dot{\varphi}^2 r\sin^2\vartheta\right)\underline{e}_r \\
&\quad + \left(\ddot{\vartheta}r + 2\dot{\vartheta}\dot{r} - \dot{\varphi}^2 r\cos\vartheta\,\sin\vartheta\right)\underline{e}_\vartheta \qquad (4.136) \\
&\quad + \left(\ddot{\varphi}r\sin\vartheta + 2\dot{\varphi}\dot{r}\sin\vartheta + 2\dot{\varphi}\dot{\vartheta}r\cos\vartheta\right)\underline{e}_\varphi.
\end{aligned}$$

Der Gradient berechnet sich zu

$$\begin{aligned}
\partial_{\underline{r}}\, f &= \sum_a \frac{1}{h_a}\partial_{\xi^a} f\cdot\hat{\underline{b}}^a \\
\partial_{\underline{r}}\, f &= \partial_r f\underline{e}_r + \frac{1}{r}\partial_\vartheta f\underline{e}_\vartheta + \frac{1}{r\sin\vartheta}\partial_\varphi f\underline{e}_\varphi
\end{aligned} \tag{4.137}$$

Die Divergenz berechnet sich zu

$$\begin{aligned}
\partial_{\underline{r}}\,\underline{A} &= \frac{1}{h_1h_2h_3}\left\{\partial_{\xi^1}\left(h_2h_3\hat{A}^1\right) + \partial_{\xi^2}\left(h_1h_3\hat{A}^2\right) + \partial_{\xi^3}\left(h_1h_2\hat{A}^3\right)\right\} \\
\partial_{\underline{r}}\,\underline{A} &= \frac{1}{r^2\sin\vartheta}\left\{\partial_r\left(r^2\sin\vartheta\,\hat{A}^1\right) + \partial_\vartheta\left(r\sin\vartheta\,\hat{A}^2\right) + \partial_\varphi\left(r\hat{A}^3\right)\right\} \\
\partial_{\underline{r}}\,\underline{A} &= \frac{1}{r^2}\partial_r\left(r^2\hat{A}^1\right) + \frac{1}{r\sin\vartheta}\partial_\vartheta\left(\sin\vartheta\,\hat{A}^2\right) + \frac{1}{r\sin\vartheta}\partial_\varphi\hat{A}^3
\end{aligned} \tag{4.138}$$

Die Rotation berechnet sich zu

$$\begin{aligned}
\left(\partial_{\underline{r}} \times \underline{A}\right)_1 &= \frac{1}{h_2 h_3}\left\{\partial_{\xi^2}\left(h_3 \hat{A}_3\right) - \partial_{\xi^3}\left(h_2 \hat{A}_3\right)\right\} \quad \text{und zyklisch} \\
\left(\partial_{\underline{r}} \times \underline{A}\right)_1 &= \frac{1}{r^2 \sin\vartheta}\left\{\partial_\vartheta\left(r \sin\vartheta\, \hat{A}_3\right) - \partial_\varphi\left(r \hat{A}_2\right)\right\} \\
&= \frac{1}{r \sin\vartheta}\left\{\partial_\vartheta\left(\sin\vartheta\, \hat{A}_3\right) - \partial_\varphi \hat{A}_2\right\} \qquad (4.139) \\
\left(\partial_{\underline{r}} \times \underline{A}\right)_2 &= \frac{1}{r \sin\vartheta}\left\{\partial_\varphi \hat{A}_1 - \partial_r\left(r \sin\vartheta\, \hat{A}_3\right)\right\} = \frac{1}{r \sin\vartheta}\partial_\varphi \hat{A}_1 - \frac{1}{r}\partial_r\left(r \hat{A}_3\right) \qquad (4.140) \\
\left(\partial_{\underline{r}} \times \underline{A}\right)_3 &= \frac{1}{r}\left\{\partial_r\left(r \hat{A}_2\right) - \partial_\vartheta \hat{A}_1\right\} = \frac{1}{r}\partial_r\left(r \hat{A}_2\right) - \frac{1}{r}\partial_\vartheta \hat{A}_1 \qquad (4.141)
\end{aligned}$$

Der Laplace-Operator berechnet sich zu

$$\begin{aligned}
\partial^2_{\underline{r}} f &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\sum_a \partial_{\xi^a}\left(\frac{h_1 h_2 h_3}{h_a^2}\partial_{\xi^a} f\right) \\
\partial^2_{\underline{r}} f &= \frac{1}{r^2 \sin\vartheta}\left\{\partial_r\left(r^2 \sin\vartheta\, \partial_r f\right) + \partial_\vartheta\left(\sin\vartheta\, \partial_\vartheta f\right) + \partial_\varphi\left(\frac{1}{\sin\vartheta}\partial_\varphi f\right)\right\} \\
\partial^2_{\underline{r}} f &= \frac{1}{r^2}\partial_r\left(r^2 \partial_r f\right) + \frac{1}{r^2 \sin\vartheta}\partial_\vartheta\left(\sin\vartheta\, \partial_\vartheta f\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\vartheta}\partial^2_\varphi f \\
\partial^2_{\underline{r}} f &= \partial_r^2 f + \frac{2}{r}\partial_r f + \frac{1}{r^2}\partial^2_\vartheta f + \frac{\cot\varphi}{r^2}\partial_\vartheta f + \frac{1}{r^2 \sin^2\vartheta}\partial^2_\varphi f \qquad (4.142)
\end{aligned}$$

Kapitel 5

Elemente der Tensorrechnung

1 Begriff des Tensors

- Ausgangspunkt:

  Wir betrachten Physikalische Größen und Gesetze in Räumen. Wichtige Beispiele für derartige Räume sind der 3-dimensionale Ortsraum, der die mathematische Strktur eines Euklidischen Raumes besitzt, der 4-dimensionale Minkowski-Raum, der fundamental für die spezielle Relativitätstheorie ist, der 4-dimensionale Riemann-Raum, in dem die Allgemeine Relativitätstheorie formuliert ist und der ∞-dimensionale Hilbert-Raum, in dem die Quantentheorie durchgeführt wird.

  In diesem Abschnitt beschränken wir unsere Überlegungen auf den 3-dimensionalen Ortsraum.

  Beispiele für physikalische Größen sind:

Größe	Struktur	Wertigkeit
Temperatur	Skalar	reelle Zahl
Ladungsdichte	Skalar	reelle Zahl
Magnetfeldstärke	Vektor	3-Tupel reeller Zahlen
Kraft	Vektor	3-Tupel reeller Zahlen
Spannungstensor	Tensor 2. Stufe	3x3-Matrix reller Zahlen
Trägheitstensor	Tensor 2. Stufe	3x3-Matrix reller Zahlen

- Im Ortsraum können willkürliche Koordinatensysteme aufgespannt werden, um physikalische Größen und Gesetze quantitativ zu behandeln. Beispiele für Koordinatensysteme sind:

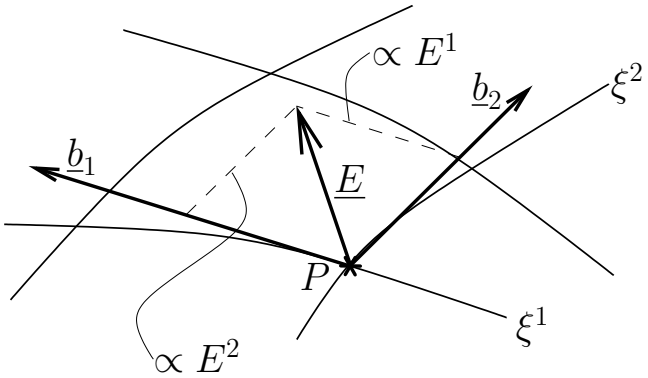
  - Kartesische Koordinaten
  - Zylinderkoordinaten
  - Kugelkoordinaten
  - Elliptische Koordinaten

- Physikalische Größen existieren unabhängig von speziellen Koordinatensystemen, sind also objektiv. Die Komponenten physikalischer Größen hingegen hängen i.a. vom Koordinatensystem ab. Die Komponenten sind also subjektiv, da auch das Koordinatensystem subjektiv ist.

  Betrachten wir z.B. das elektische Feld $\underline{E}$ in einem Punkt P. Das Koordinatensystem ξ^1, ξ^2, ξ^3 legt in P eine Basis fest. Wir betrachten hier z.B. die kovariante Basis $\{\underline{b}_a\}$.

  Die Komponenten von $\underline{E}$ hängen natürlich von der gewählten Basis ab, denn es gilt bekanntlich

$\underline{E} = E^a \underline{b}_a$

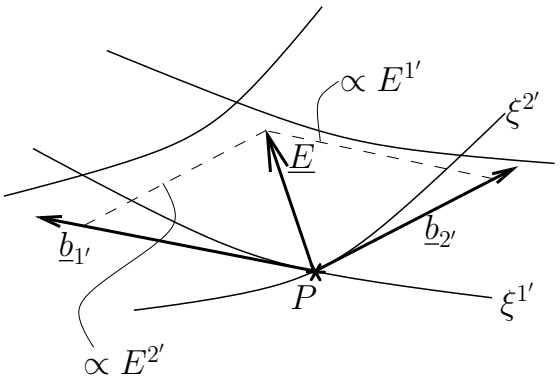


Die Summenkonvention ist in diesem Abschnitt wieder in Kraft gesetzt.

Hinweis: Alles spielt sich hier nur im Punkt P ab!

- Koordinatentransformationen

  Wir betrachten jetzt den gleichen Punkt P und das gleiche elektrische Feld $\underline{E}$, aber in anderen Koordinaten $\xi^{1'}, \xi^{2'}, \xi^{3'}$.



Obwohl die physikalische Größe ausgedrückt durch $\underline{E}$ unverändert ist, haben sich im neuen Koordinatensystem die Komponenten von $\underline{E}$ verändert:

$$E^{a'} \neq E^a \tag{5.1}$$

- Wir beschreiben die Koordinatentransformation jetzt mathematisch.

$$\begin{array}{ccc} KS & \leftrightarrow & KS' \\ \xi^1, \xi^2, \xi^3 & \leftrightarrow & \xi^{1'}, \xi^{2'}, \xi^{3'} \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \text{hin} & & \text{rück} \\ \xi^{1'} = \xi^{1'}\left(\xi^1, \xi^2, \xi^3\right) & & \xi^1 = \xi^1\left(\xi^{1'}, \xi^{2'}, \xi^{3'}\right) \\ \xi^{2'} = \xi^{2'}\left(\xi^1, \xi^2, \xi^3\right) & \mid & \xi^2 = \xi^2\left(\xi^{1'}, \xi^{2'}, \xi^{3'}\right) \\ \xi^{3'} = \xi^{3'}\left(\xi^1, \xi^2, \xi^3\right) & & \xi^3 = \xi^3\left(\xi^{1'}, \xi^{2'}, \xi^{3'}\right) \end{array} \tag{5.2}$$

Kurzfassung:

$$\xi^{a'} = \xi^{a'}\left(\xi^b\right) \quad \mid \quad \xi^a = \xi^a\left(\xi^{b'}\right) \tag{5.3}$$

Beispiel: Seien KS Kugelkoordinaten und KS' kartesische Koordinaten:

$$\begin{array}{rcl|rcl} \xi^{1'} &=& \xi^1 \sin\xi^2 \cos\xi^3 & \xi^1 &=& \sqrt{\left(\xi^{1'}\right)^2 + \left(\xi^{2'}\right)^2 + \left(\xi^{3'}\right)^2} \\ \xi^{2'} &=& \xi^1 \sin\xi^2 \sin\xi^3 & \xi^2 &=& \arctan\left(\frac{\sqrt{\left(\xi^{1'}\right)^2+\left(\xi^{2'}\right)^2}}{\xi^{3'}}\right) \\ \xi^{3'} &=& \xi^1 \cos\xi^2 & \xi^3 &=& \arctan\left(\frac{\xi^{2'}}{\xi^{1'}}\right) \end{array}$$

Wir bennen die Koordinaten jetzt um:

$$\begin{array}{lll} \xi^{1'} = x^1\,, & \xi^{2'} = x^2\,, & \xi^{3'} = x^3 \\ \xi^1 = r\,, & \xi^2 = \vartheta\,, & \xi^3 = \varphi \end{array}$$

- Die Berechnung der Komponenten von $\underline{E}$ in KS' geht wie folgt:

$$\underline{E} = E^a \underline{b}_a = E^{b'} \underline{b}_{b'} \tag{5.4}$$

$$\underline{b}_a = \frac{\partial \underline{r}}{\partial \xi^a} = \frac{\partial \underline{r}}{\partial \xi^{b'}} \cdot \frac{\partial \xi^{b'}}{\partial \xi^a} = \frac{\partial \xi^{b'}}{\partial \xi^a} \cdot \underline{b}_{b'} \tag{5.5}$$

Die Gleichungen (5.5) stellen eine Basistansformation dar.

Wir führen neue Bezeichnungen ein:

$$\left(J_a^{b'}\right) = \left(\frac{\partial \xi^{b'}}{\partial \xi^a}\right) \qquad \begin{array}{c}\text{Transformationsmatrix oder} \\ \text{Jacobi-Matrix}\end{array} \tag{5.6}$$

$$\left(J_{b'}^{a}\right) = \left(\frac{\partial \xi^{a}}{\partial \xi^{b'}}\right) \qquad \text{inverse Jacobi-Matrix} \tag{5.7}$$

Die beiden Matrizen sind tatsächlich invers zueinander, denn es gilt

$$J_{b'}^a J_c^{b'} = \frac{\partial \xi^a}{\partial \xi^{b'}} \cdot \frac{\partial \xi^{b'}}{\partial \xi^c} = \frac{\partial \xi^a}{\partial \xi^c} = \delta_c^a$$

Für $\underline{E}$ können wir nunmehr schreiben

$$\underline{E} = E^a J_a^{b'} \underline{b}_{b'}. \tag{5.8}$$

Für die Komponenten von $\underline{E}$ lesen wir die Transformation

$$E^{b'} = J_a^{b'} E^a \tag{5.9}$$

ab. Analog gilt für die inverse Transformation

$$E^a = J_{b'}^a E^{b'} \tag{5.10}$$

Die Basistransformation (5.5) hat die Koordinatentransformation (5.10) zur Folge.

- Wir bilden jetzt einen vorläufigen Tensorbegriff: Eine physikalische Größe, deren Komponenten sich bei einer Koordinatentransformation verhalten wie eben berechnet, heißt Tensor!

  Man sagt, daß E^a die kontravarianten Komponenten eines Tensors sind. Man sagt auch, was nicht ganz korrekt ist, daß E^a ein kontravarianter Tensor ist.

  Analog gilt für die kovarianten Komponeten eines Tensors:

$$\underline{E} = E_a \underline{b}^a = E_a \frac{\partial \xi^a}{\partial \underline{r}} = E_a \frac{\partial \xi^a}{\partial \xi^{b'}} \frac{\partial \xi^{b'}}{\partial \underline{r}} \tag{5.11}$$

$$\underline{E} = E_a J_{b'}^a \underline{b}^{b'} = E_{b'} \underline{b}^{b'} \tag{5.12}$$

$$\curvearrowright \quad E_{b'} = J_{b'}^a E_a \tag{5.13}$$

- Der Tensorbegriff, den wir am Beispiel des elektrischen Feld-Vektors plausibel gemacht haben, ist auch für Skalare etc. erweiterbar.

  Skalare sind Tensoren 0. Stufe.

  Vektoren sind Tensoren 1. Stufe.

  Es gibt Tensoren beliebiger Stufe.

  Es gibt Größen mit Tensorcharakter, die nicht unmittelbar physikalische Größen sind. Diese werden dann geometrische Objekte genannt. Ein Beispiel dafür ist der metrische Fundamentaltensor g_{ab}.

  Bei Betrachtung eines Punktes P spricht man von Tensoren in diesem Punkt. Bei Ausdehnung der Betrachtung auf den gesamten Raum spricht man von Tensorfeldern.

- Wir betrachten jetzt Tensoren 2. Stufe.

  Es gibt physikalische Größen, die weder Skalar noch Vektor sind. Das Trägheitsmoment $\underline{\underline{\Theta}}$ ist z.B. eine solche Größe. Es ist ein Tensor 2. Stufe, der in der Vorlesung „Theoretische Mechanik“ ausführlicher behandelt wird.

  Ein allgemeiner Tensor $\underline{\underline{T}}$ lebt in einem Produktraum, dessen Basis durch dyadische Produkte von $\underline{b}_a$ bzw. $\underline{b}^a$ gebildet wird:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{T}} &= T^{ab}\,\underline{b}_a \circ \underline{b}_b \\ &= T_{ab}\,\underline{b}^a \circ \underline{b}^b \\ &= T^a_{\ b}\,\underline{b}_a \circ \underline{b}^b \\ &= T_a^{\ b}\,\underline{b}^a \circ \underline{b}_b \end{aligned} \tag{5.14}$$

  Wir haben hier $\underline{\underline{T}}$ mittels 4 verschiedener Basis-Systeme dargestellt. $\{\underline{b}_a \circ \underline{b}_b\}$, $\left\{\underline{b}^a \circ \underline{b}^b\right\}$, $\left\{\underline{b}_a \circ \underline{b}^b\right\}$ und $\{\underline{b}^a \circ \underline{b}_b\}$ stellen jeweils einen anderen Satz von Basiselementen im Produktraum dar. Entsprechend verschieden sind die Komponenten von $\underline{\underline{T}}$ bezüglich dieser Basen.

  T^{ab} sind die kontravarianten Komponenten von $\underline{\underline{T}}$.

  T_{ab} sind die kovarianten Komponenten.

  $T^a_{\ b}$, $T^b_{\ a}$ sind gemischte Komponenten.

  Die Bezeichnung „Tensor“ geht auf den Tensor 2. Stufe zurück, der den elastischen Spannungszustand eines deformierten Körpers beschreibt.

- Auch Tensoren höherer Stufe sind möglich.

  Ein Tensor 3. Stufe $\underline{\underline{\underline{T}}}$ lebt in einem entsprechend erweiterten Produktraum. Eine Basis ist z.B. $\{\underline{b}_a \circ \underline{b}_b \circ \underline{b}_c\}$. Dann gilt die Darstellung

$$\underline{\underline{\underline{T}}} = T^{abc}\underline{b}_a \circ \underline{b}_b \circ \underline{b}_c \tag{5.15}$$

  Die Erweiterung auf Tensoren n-ter Stufe ist offensichtlich.

- Zur Erinnerung: Die Basisgrößen und Komponenten sind Funktionen der Koordinaten:

$$\underline{b}^a\left(\xi^1,\xi^2,\xi^3\right), \quad T^{ab}\left(\xi^1,\xi^2,\xi^3\right), \ldots$$

  Zunächst hatten wir einen festen Punkt P im Raum betrachtet. Die Überlegungen gelten in gleicher Weise für jeden beliebigen Punkt. Damit werden die Basiselemente und die entsprechenden Tensorkomponenten koordinatenabhängig.

- Nach dem vorläufigen Tensorbegriff folgt jetzt eine formale Definition:

  Tensoren sind physikalische oder geometrische Größen, deren Komponenten sich bei Koordinatentransformationen $KS \to KS'$ wie folgt verhalten:

  Tensoren 0. Stufe: S

  $$S = S' \tag{5.16}$$

  Tensoren 1. Stufe: $\underline{v}$

  $$\begin{aligned} v^{a'} &= J^{a'}_{b} v^b \\ v_{a'} &= J^{b}_{a'} v_b \end{aligned} \tag{5.17}$$

  Tensoren 2. Stufe: $\underline{\underline{T}}$

  $$\begin{aligned} T^{a'b'} &= J^{a'}_{c} J^{b'}_{d} T^{cd} \\ T_{a'b'} &= J^{c}_{a'} J^{d}_{b'} T_{cd} \\ T^{a'}_{\ b'} &= J^{a'}_{c} J^{d}_{b'} T^{c}_{\ d} \\ T_{a'}^{\ b'} &= J^{c}_{a'} J^{b'}_{d} T_{c}^{\ d} \end{aligned} \tag{5.18}$$

  Tensoren höherer Stufe $\underline{\underline{\underline{T}}}$, $\underline{\underline{\underline{\underline{T}}}}$, ... verhalten sich analog.

  Die Rücktransformation erfolgt mit den jeweils inversen Jacobi-Matrizen.

- Wir betrachten ein Beispiel für Tensoren anhand der Metrischen Fundamentalgleichung:

  $$\mathrm{d}s^2 = g_{ab}\, \mathrm{d}\xi^a\, \mathrm{d}\xi^b$$

  In dieser Form gilt die Gleichung im Koordinatensystem KS mit den Koordinaten ξ^1, ξ^2, ξ^3. Wir führen nun einen Koordinatentransformation (5.2) durch und schreiben die Metrische Fundamentalgleichung im neuen Koordinatensystem KS' mit den Koordinaten $\xi^{1'}$, $\xi^{2'}$, $\xi^{3'}$ noch einmal auf:

  $$\mathrm{d}s'^2 = g_{a'b'}\, \mathrm{d}\xi^{a'}\, \mathrm{d}\xi^{b'}$$

  Der infinitesimale Abstand zwischen zwei benachbarten Punkten $\mathrm{d}s$ bzw. $\mathrm{d}s'$ ist aber in KS und KS' gleich:

  $$\mathrm{d}s = \mathrm{d}s' \quad \text{oder} \quad \mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}s'^2$$

  Somit ist $\mathrm{d}s$ ein Tensor 0. Stufe. Es folgt

  $$g_{ab}\, \mathrm{d}\xi^a\, \mathrm{d}\xi^b = g_{a'b'}\, \mathrm{d}\xi^{a'}\, \mathrm{d}\xi^{b'}$$

  Die linke Seite und die rechte Seite dieser Gleichung sind zwar als Ganzes ein Tensor 0. Stufe, aber mitnichten die jeweiligen Einzelteile. Um die Eigenschaften der Einzelteile herauszufinden, untersuchen wir deren Verhalten bei der Koordinatentransformation $KS \to KS'$.

  Das Verhalten der Koordinatendifferentiale $\mathrm{d}\xi^a$ bzw. $\mathrm{d}\xi^{a'}$ findet man durch Differentialbildung von (5.3):

  $$\mathrm{d}\xi^a = \frac{\partial \xi^a}{\partial \xi^{c'}}\, \mathrm{d}\xi^{c'} = J^{a}_{c'}\, \mathrm{d}\xi^{c'}. \tag{5.19}$$

  Die $\mathrm{d}\xi^a$ transformieren sich also wie die kontravarianten Komponenten eines Tensors 1. Stufe. Dann folgt

  $$\begin{aligned} g_{ab} J^{a}_{c'}\, \mathrm{d}\xi^{c'} J^{b}_{d'}\, \mathrm{d}\xi^{d'} &= g_{ab} J^{d}_{c'} J^{b}_{d'}\, \mathrm{d}\xi^{c'}\, \mathrm{d}\xi^{d'} \\ &= g_{c'd'}\, \mathrm{d}\xi^{c'}\, \mathrm{d}\xi^{d'} \end{aligned}$$

  Der Koeffizientenvergleich bezüglich der Koordinatendifferentiale $\mathrm{d}\xi^{a'}$ ergibt

  $$g_{c'd'} = J^{a}_{c'} J^{b}_{d'} g_{ab} \tag{5.20}$$

  Somit transformieren sich die g_{ab} wie die kovarianten Komponenten eines Tensors 2. Stufe.

2 Tensor-Operationen

- Addition

  Die Addition ist nur für Tensorkomponenten gleichen Typs erklärt.

$$B^a = C^a + D^a \tag{5.21}$$
$$B^a{}_b = C^a{}_b + D^a{}_b \tag{5.22}$$
usw.

- Multiplikation

  Bei der Multiplikation von Tensorkomponenten muß sich in jedem Summanden im Ganzen der gleiche Typ ergeben:

$$B^{ab} = C^a D^b \tag{5.23}$$
$$B^a{}_{bc} = C^a{}_b D_c \tag{5.24}$$
usw.

- Verjüngung

  Über zwei gleiche Indizes wird automatisch summiert. Die Tensor-komponenten werden dabei um zwei Stufen herabgesetzt:

$$T^a{}_a = T \tag{5.25}$$
$$T^{abc}{}_c = T^{ab} \tag{5.26}$$
usw.

  Statt Verjüngung ist auch der Begriff „Kontraktion zweier Indizes“ gebräuchlich. Für einen Tensor 2. Stufe entspricht die Verjüngung einer Spurbildung. Für ein Produkt zweier Tensoren 1. Stufe entspricht die Verjüngung der Bildung eines Skalarproduktes.

- Symmetrien für Tensoren 2. Stufe

  T_{ab} symmetrisch $\Leftrightarrow$ $T_{ab} = T_{ba}$

  Wenn $T_{ab} = T_{ba}$ gilt, dann gilt auch $T^{ab} = T^{ba}$.

  Beweis:

$$T^{ab} = g^{ac} g^{bd} T_{cd} = g^{bd} g^{ac} T_{dc} = g^{bc} g^{ad} T_{cd} = T^{ba}$$

  Wenn ein Tensor 2. Stufe symmetrisch ist, also $T_{ab} = T_{ba}$ gilt, hat der Tensor 6 voneinander unabhängige Komponenten.

  T_{ab} antisymmetrisch $\Leftrightarrow$ $T_{ab} = -T_{ba}$

  Wenn $T_{ab} = -T_{ba}$ gilt, dann gilt auch $T^{ab} = -T^{ba}$

  Wenn ein Tensor 2. Stufe antisymmetrisch ist, also $T_{ab} = -T_{ba}$ gilt, hat der Tensor 3 voneinander unabhängige Komponenten, da die Diagonalelemente identisch null sein müssen.

  Jeder Tensor 2. Stufe läßt sich eindeutig in einen symmetrischen und einen antisymmetrischen Anteil aufspalten:

$$T_{ab} = \underbrace{\frac{1}{2}\left(T_{ab} + T_{ba}\right)}_{\text{symmetrisch}} + \underbrace{\frac{1}{2}\left(T_{ab} - T_{ba}\right)}_{\text{antisymmetrisch}} \tag{5.27}$$

- Überschiebung

Überschieben ist eine Multiplikation mit gleichzeitiger Verjüngung, z.B.

$$T^{ab}{}_{c}S_{d}{}^{c} = D^{ab}{}_{d} \tag{5.28}$$

Ein Spezialfall der Überschiebung ist das Indexziehen:

$$g_{ab}v^{b} = v_{a} \tag{5.29}$$

- Quotientensatz

  T^{ab} seien Tensorkomponenten. Es sei nicht bekannt, ob auch N_{ab} Tensorkomponenten sind. Falls $T^{ab}N_{ab} = S$ ein Skalar S ergibt, folgt, daß auch N_{ab} Tensorkomponenten sind.

  Beweis:

$$\begin{aligned} S &= S' \\ T^{ab}N_{ab} &= T^{a'b'}N_{a'b'} \\ J^{a}_{c'}J^{b}_{d'}T^{c'd'}N_{ab} &= T^{a'b'}N_{a'b'} = T^{c'd'}N_{c'd'} \end{aligned}$$

  Koeffizientenvergleich ergibt:

$$J^{a}_{c'}J^{b}_{d'}N_{ab} = N_{c'd'}$$

  Somit ist N_{ab} ein Tensor.

  q.e.d.

  Der Quotientensatz gilt nicht nur für Tensoren 2. Stufe, sondern für Tensoren beliebiger Stufe.

  Es sind vielfältige Derivate dieses Quotientensatzes konstruierbar. Wenn z.B. gilt

$$T^{abc}N_{cd} = Q^{ab}{}_{d}$$

  wobei T^{abc}, $Q^{ab}{}_{d}$ Tensorkomponenten sind, dann folgt, daß auch N_{cd} Tensorkomponenten sind.

  Beweis: Rückführung auf den Quotientensatz für Tensoren 2. Stufe.

$$\begin{aligned} T^{abc}N_{cd} &= Q^{ab}{}_{d} \quad | \text{ Überschieben mit } Q_{ab}{}^{d} && (5.30) \\ T^{abc}N_{cd}Q_{ab}{}^{d} &= \underbrace{Q^{ab}{}_{d}Q_{ab}{}^{d}}_{=S} && (5.31) \\ T^{abc}Q_{ab}{}^{d}N_{cd} &= S && (5.32) \\ T^{abc}Q_{ab}{}^{d} &\equiv R^{cd} \quad \text{(Abkürzung)} && (5.33) \\ R^{cd}N_{cd} &= S && (5.34) \end{aligned}$$

  Folglich sind N_{cd} Tensorkomponenten.

  q.e.d.

- Wir betrachten jetzt die Spur eines Produktes aus symmetrischen und antisymmetrischen Tensoren. Es gelte

$$s_{ab} = s_{ba} \quad \text{und} \quad a_{cd} = -a_{dc}$$

  Dann folgt

$$s_{cd}a^{dc} = 0$$

Beweis:

$$\begin{aligned} a^{cd} &= -a^{dc} && \text{(klar)} \\ s_{cd}a^{dc} &= -s_{dc}a^{cd} && \text{(Einarbeitung der Symmetrien)} \\ &= -s_{cd}a^{dc} && \text{(Umbenennung der Indizes: } c \leftrightarrow d,\ d \to c) \\ 2s_{cd}a^{dc} &= 0 \end{aligned}$$

Folglich muß

$$s_{cd}a^{dc} = 0 \tag{5.35}$$

gelten.

Diese Regel gilt auch für Tensoren höherer Stufe, wenn ein Indexpaar symmetrisch und eines antisymmetrisch ist.

3 Beispiele

- Tensoren 0. Stufe
  - $\mathrm{d}s^2$
  - Skalarprodukt zweier Tensoren 1. Stufe ist ein Tensor 0. Stufe:

    $$\underline{v}\,\underline{w} = v^a w_a = v^{c'} w_{c'}$$

    denn $v^{c'} = J^{c'}_b v^b$, $w_{c'} = J^d_{c'} w_d$ und damit

    $$\begin{aligned} v^{c'} w_{c'} &= J^{c'}_b v^b J^d_{c'} w_d = J^{c'}_b J^d_{c'} v^b w_d \\ J^{c'}_b J^d_{c'} &= \frac{\partial \xi^{c'}}{\partial \xi^b} \cdot \frac{\partial \xi^d}{\partial \xi^{c'}} = \frac{\partial \xi^d}{\partial \xi^b} = \delta^d_b \\ v^{c'} w_{c'} &= \delta^d_b v^b w_d = v^b w_b \end{aligned}$$

  - Nicht jeder Skalar ist auch ein Tensor 0. Stufe.

    $$g = \det(g_{ab})$$

    ist kein Tensor, denn

    $$\begin{aligned} g_{ab} &= J^{c'}_a J^{d'}_b g_{c'd'} = J^{c'}_a g_{c'd'} J^{d'}_b \\ \det(g_{ab}) &= \det\left(J^{c'}_a\right) \det\left(J^{d'}_b\right) \det(g_{c'd'}). \end{aligned}$$

    Sei

    $$J \equiv \det\left(\frac{\partial \xi^a}{\partial \xi^{b'}}\right) = \det\left(J^a_{b'}\right) \qquad \text{(Jacobi-Determinante)} \tag{5.36}$$

    so gilt

    $$\det\left(J^{a'}_b\right) = \frac{1}{J}. \tag{5.37}$$

    Damit folgt

    $$g = \frac{1}{J^2} g' \quad \text{bzw.} \quad g' = J^2 g. \tag{5.38}$$

    g ist also kein Tensor, da i.a. $J \neq 1$ gilt.
  - $\partial_{\underline{r}}\ \underline{A} = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_{\xi^a} \left(\sqrt{g} A^a\right)$ ist ein Tensor 0. Stufe. Der Beweis bleibt dem Leser als Übungsaufgaben überlassen.

– Das Volumenelement $\mathrm{d}V$ ist ein Tensor 0. Stufe.

Zu zeigen ist

$$\mathrm{d}V = \mathrm{d}V'$$

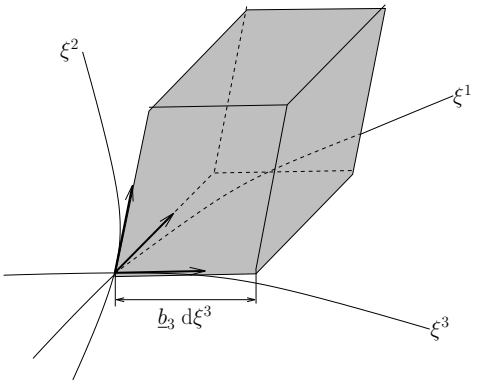
Wir werden aber sehen, dass wir

$$\mathrm{d}V = \mathrm{sign}J\mathrm{d}V' = \pm\mathrm{d}V'$$

zulassen müssen, so dass in Strenge $|\mathrm{d}V|$ als Tensor 0. Stufe zu betrachten wäre! $\mathrm{d}V$ bezeichnet man als Pseudotensor 0. Stufe.

Im Abschnitt 2.5 wurde bereits vorgegriffen und die Jacobi-Funktionaldeterminante in die Transformation des Volumenelemtes eingearbeitet. Jetzt erfolgt die Ableitung.

Das Volumenelement $\mathrm{d}V$ ist in beliebigen krummlinigen Koordinaten das Volumen eines Parallelepipeds und wird über das Spatprodukt berechnet:



$$\begin{aligned}
\mathrm{d}V = &\quad |\underline{b}_1\,\mathrm{d}\xi^1\ \underline{b}_2\,\mathrm{d}\xi^2\ \underline{b}_3\,\mathrm{d}\xi^3| \\
\hat{=} &\quad \left(\underline{b}_1\,\mathrm{d}\xi^1 \times \underline{b}_2\,\mathrm{d}\xi^2\right)\underline{b}_3\,\mathrm{d}\xi^3 \\
= &\quad (\underline{b}_1 \times \underline{b}_2)\,\underline{b}_3\,\mathrm{d}\xi^1\mathrm{d}\xi^2\mathrm{d}\xi^3
\end{aligned}$$

Vermöge (4.46) folgt

$$\mathrm{d}V = \sqrt{g}\,\mathrm{d}\xi^1\,\mathrm{d}\xi^2\,\mathrm{d}\xi^3 \tag{5.39}$$

Die Integration ber $\mathrm{d}\xi^1\,\mathrm{d}\xi^2\,\mathrm{d}\xi^3$ muß jetzt in eine Integration ber $\mathrm{d}\xi^{1'}\,\mathrm{d}\xi^{2'}\,\mathrm{d}\xi^{3'}$ umgerechnet werden. Das wird durch eine sukzessive Ersetzung beginnend bei $\mathrm{d}\xi^3$ errreicht. Bei der $\mathrm{d}\xi^3$-Integration werden aber ξ^1 und ξ^2 festgehalten; deshalb gilt für die $\mathrm{d}\xi^3$-Integration:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\xi^1 &= J^1_{a'}\,\mathrm{d}\xi^{a'} = J^1_{1'}\,\mathrm{d}\xi^{1'} + J^1_{2'}\,\mathrm{d}\xi^{2'} + J^1_{3'}\,\mathrm{d}\xi^{3'} = 0 \\
\mathrm{d}\xi^2 &= J^2_{a'}\,\mathrm{d}\xi^{a'} = J^2_{1'}\,\mathrm{d}\xi^{1'} + J^2_{2'}\,\mathrm{d}\xi^{2'} + J^2_{3'}\,\mathrm{d}\xi^{3'} = 0 \\
\mathrm{d}\xi^3 &= J^3_{a'}\,\mathrm{d}\xi^{a'} = J^3_{1'}\,\mathrm{d}\xi^{1'} + J^3_{2'}\,\mathrm{d}\xi^{2'} + J^3_{3'}\,\mathrm{d}\xi^{3'} = \mathrm{d}\xi^3
\end{aligned} \tag{5.40}$$

Wir lösen das Gleichungssystem (5.40) nach $\mathrm{d}\xi^{3'}$ auf:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\xi^{3'} &= \frac{\begin{vmatrix} J^1_{1'} & J^1_{2'} & 0 \\ J^2_{1'} & J^2_{2'} & 0 \\ J^3_{1'} & J^3_{2'} & \mathrm{d}\xi^3 \end{vmatrix}}{J} \\ \mathrm{d}\xi^{3'} &= \frac{1}{J} \begin{vmatrix} J^1_{1'} & J^1_{2'} \\ J^2_{1'} & J^2_{2'} \end{vmatrix} \mathrm{d}\xi^3 \equiv \frac{J^{(2)}}{J}\,\mathrm{d}\xi^3 \end{aligned} \tag{5.41}$$

Dabei stellt $J^{(n)}$ die Determinante aus den ersten n Zeilen und Spalten dar. Damit gilt:

$$\mathrm{d}\xi^3 = \frac{J}{J^{(2)}}\,\mathrm{d}\xi^{3'} \tag{5.42}$$

Wir erhalten das Zwischenresultat:

$$\mathrm{d}\xi^1\,\mathrm{d}\xi^2\,\mathrm{d}\xi^3 = \mathrm{d}\xi^1\,\mathrm{d}\xi^2\frac{J}{J^{(n)}}\,\mathrm{d}\xi^{3'}. \tag{5.43}$$

Bei der $\mathrm{d}\xi^2$-Integration werden ξ^1 und ξ^3 bzw. $\xi^{3'}$ festgehalten, deshalb gilt für die $\mathrm{d}\xi^2$-Integration:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\xi^1 &= J^1_{a'}\,\mathrm{d}\xi^{a'} = J^1_{1'}\,\mathrm{d}\xi^{1'} + J^1_{2'}\,\mathrm{d}\xi^{2'} + 0 = 0 \\ \mathrm{d}\xi^2 &= J^2_{a'}\,\mathrm{d}\xi^{a'} = J^2_{1'}\,\mathrm{d}\xi^{1'} + J^2_{2'}\,\mathrm{d}\xi^{2'} + 0 = \mathrm{d}\xi^2 \\ \mathrm{d}\xi^3 &= J^3_{a'}\,\mathrm{d}\xi^{a'} = J^3_{1'}\,\mathrm{d}\xi^{1'} + J^3_{2'}\,\mathrm{d}\xi^{2'} + 0 = 0 \end{aligned} \tag{5.44}$$

Die ersten beiden Gleichungen von (5.44) sind ausreichend um $\mathrm{d}\xi^{2'}$ zu bestimmen:

$$\mathrm{d}\xi^{2'} = \frac{\begin{vmatrix} J^1_{1'} & 0 \\ J^2_{1'} & \mathrm{d}\xi^2 \end{vmatrix}}{J^{(2)}} = \frac{J^{(1)}}{J^{(2)}}\,\mathrm{d}\xi^2. \tag{5.45}$$

Somit gilt:

$$\mathrm{d}\xi^2 = \frac{J^{(2)}}{J^{(1)}}\,\mathrm{d}\xi^{2'}. \tag{5.46}$$

Wir erhalten ein weiteres Zwischenresultat:

$$\mathrm{d}\xi^1\,\mathrm{d}\xi^2\,\mathrm{d}\xi^3 = \mathrm{d}\xi^1\frac{J^{(2)}}{J^{(1)}}\,\mathrm{d}\xi^{2'}\frac{J}{J^{(n)}}\,\mathrm{d}\xi^{3'} = \mathrm{d}\xi^1\frac{J}{J^{(1)}}\,\mathrm{d}\xi^{2'}\,\mathrm{d}\xi^{3'} \tag{5.47}$$

Zuletzt wird die $\mathrm{d}\xi^1$-Integration bei festgehaltenen ξ^2 bzw. $\xi^{2'}$ und ξ^3 bzw. $\xi^{3'}$ durchgeführt:

$$\mathrm{d}\xi^1 = J^1_{1'}\,\mathrm{d}\xi^{1'} \tag{5.48}$$

$$\curvearrowright \quad \mathrm{d}\xi^{1'} = \frac{1}{J^{(1)}}\,\mathrm{d}\xi^1 \tag{5.49}$$

Damit erhalten wir:

$$\mathrm{d}\xi^1\,\mathrm{d}\xi^2\,\mathrm{d}\xi^3 = J\,\mathrm{d}\xi^{1'}\,\mathrm{d}\xi^{2'}\,\mathrm{d}\xi^{3'} \tag{5.50}$$

Für das Volumenelement $\mathrm{d}V$ ergibt sich unter Verwendung von (5.38) :

$$\begin{aligned} \mathrm{d}V &= \sqrt{g}\,\mathrm{d}\xi^1\,\mathrm{d}\xi^2\,\mathrm{d}\xi^3 = \frac{\sqrt{g'}}{|J|}\cdot J\,\mathrm{d}\xi^{1'}\,\mathrm{d}\xi^{2'}\,\mathrm{d}\xi^{3'} \\ \mathrm{d}V &= sign(J)\sqrt{g'}\,\mathrm{d}\xi^{1'}\,\mathrm{d}\xi^{2'}\,\mathrm{d}\xi^{3'} = sign(J)\mathrm{d}V' \end{aligned} \tag{5.51}$$

Somit ist $|\mathrm{d}V|$ Tensor 0. Stufe.
Wegen der Vorzeichenumkehr bei Koordinatentransformation mit $J < 0$, nennt man $\mathrm{d}V$auch einen Pseudo-Tensor 0. Stufe.

Dieses Resultat gilt sogar für beliebige Dimensionszahlen. Für den Beweis beginne man mit der Berechnung von $\mathrm{d}\xi^{n'}$ und verfahre analog.

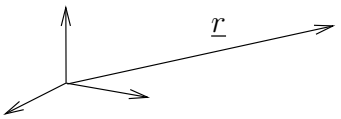
- Tensoren 1. Stufe
  - Der differentielle Verschiebungsvektor $\mathrm{d}\underline{r}$ ist ein Tensor 1. Stufe. Bekanntlich gilt

$$\mathrm{d}\underline{r} = \underline{b}_a \, \mathrm{d}\xi^a.$$

    Die Komponenten $\mathrm{d}\xi^a$ transformieren sich nach

$$\mathrm{d}\xi^a = \frac{\partial \xi^a}{\partial \xi^{d'}} \, \mathrm{d}\xi^{d'} = J^a_{d'} \, \mathrm{d}\xi^{d'}$$

    und sind somit kontravariante Komponenten eines Tensors 1. Stufe.
  - $\underline{v} = \dot{\underline{r}}$ ist ein Tensor 1. Stufe.
    Klar, da $\mathrm{d}\underline{r}$ ein Tensor 1. Stufe ist.
  - $\underline{\underline{E}} = E^a \underline{b}_a$ ist ein Tensor 1.Stufe. Klar, wurde schon am Anfang des Kapitels gezeigt.
  - $\underline{r} : \xi^1, \xi^2, \xi^3$ ist kein Tensor 1. Stufe, da $\xi^{a'} \neq J^{a'}_b \xi^b$. Außerdem ist $\underline{r}$ i.a. nicht in einer Basis darstellbar, sondern nur in Spezialfällen, wie z.B. in den kartesischen Koordinaten.



$$\underline{r} = x^a \underline{e}_a$$

    Wenn sich die Basis in P im Vergleich zum Ursprung ändert, gibt es obige Darstellung nicht mehr!!!
  - $\partial_{\underline{r}} \, f = \underline{b}^a \partial_{\xi^a} f$ ist Tensor 1. Stufe.
    Der Beweis bleibt dem Leser als Übungsaufgabe überlassen.
  - Das Vektorprodukt zweier Tensoren 1. Stufe

$$\underline{v} \times \underline{w} = \sqrt{g} \, \underline{b}^a \varepsilon_{abc} v^b w^c \tag{5.52}$$

    ist ein Tensor 1. Stufe im Falle $J > 1$!
    Beweis: Zu zeigen ist, daß

$$\sqrt{g} \, \varepsilon_{abc} v^b w^c$$

    kovariante Komponenten eines Tensors 1. Stufe sind, also sich transformieren nach

$$\sqrt{g} \, \varepsilon_{abc} v^b w^c = J^{a'}_a \sqrt{g'} \varepsilon_{a'b'c'} v^{b'} w^{c'}. \tag{5.53}$$

    Bereits bekannt sind die Transformationen

$$\begin{aligned} v^b &= J^b_{b'} v^{b'} && (\underline{v} \text{ Tensor 1. Stufe}) \\ w^c &= J^c_{c'} w^{c'} && (\underline{w} \text{ Tensor 1. Stufe}) \\ g &= \tfrac{1}{J^2} g' && (5.38). \\ \varepsilon_{abc} &= \varepsilon_{a'b'c'} \end{aligned}$$

Als Zwischenrechnung folgt

$$\sqrt{g}\,\varepsilon_{abc}v^b w^c = \varepsilon_{abc}\frac{\sqrt{g}}{|J|}J^b_{b'}J^c_{c'}v^{b'}w^{c'}. \tag{5.54}$$

Bei Einschränkung auf Koordinatentransformationen, bei denen $J > 0$ gilt, können die Betragsstriche weggelassen werden.
Vergleichen wir mit obiger nachzuweisender Transformationsformel, so bleibt noch die Beziehung

$$\varepsilon_{abc}\frac{1}{J}J^b_{b'}J^c_{c'} = J^{a'}_a\,\varepsilon_{a'b'c'}$$

bzw.

$$\varepsilon_{abc}J^a_{a'}J^b_{b'}J^c_{c'} = J\varepsilon_{a'b'c'} \tag{5.55}$$

offen. Das Levi-Civita-Symbol wurde in (3.31) unabhängig von einem speziellen Koordinatensystem definiert. Es ist also in allen Koordinatemsystemen gleich. Insbesondere gilt $\varepsilon_{a'b'c'} = 1$ für $a' = 1$, $b' = 2$, $c' = 3$. Für diesen Index-Satz folgt dann

$$\varepsilon_{abc}J^a_1J^b_2J^c_3 = J. \tag{5.56}$$

Diese Beziehung wird durch (4.34) bestätigt. Sind zwei Indizes gleich, z.B. $a' = b' = 1$, so ist auf der rechten Seite von (5.55) eine Null offensichtlich; die linke Seite verschwindet aber ebenfalls, da wir (5.35) anwenden können. Die letzte noch verbleibende Index-Konstellation betrifft paarweise verschiedene a', b', c', die nicht in der Reihenfolge 1, 2, 3 angeordnet sind. Durch die gleiche Anzahl von Permutationen der a', b', c' auf der rechten wie auf der linken Seite von (5.55) läßt sich immer die Index-Reihenfolge 1, 2, 3 herstellen, was (5.55) auf (5.56) zurückführt. Damit ist (5.55) bewiesen und somit auch die in Rede stehende Transformationsformel (5.53).

Für Koordinatentransformationen, bei denen $J < 0$ gilt, ist in (5.54)

$$|J| = -J$$

zu ersetzen. Das Minuszeichen bleibt durch alle Zwischenschritte erhalten und es folgt :

$$\sqrt{g}\varepsilon_{abc}v^b w^c = -J^{a'}_a\sqrt{g'}\varepsilon_{a'b'c'}v^{b'}w^{c'}$$

Zusammengefaßt für beliebige Vorzeichen von J kann man schreiben :

$$\sqrt{g}\varepsilon_{abc}v^b w^c = sign(J)J^{a'}_a\sqrt{g'}\varepsilon a'b'c'v^{b'}w^{c'}$$

Das Vektorprodukt ist also ein Pseudotensor !

q.e.d.

- Tensoren 2. Stufe (Tensoren im engeren Sinne)
  - g_{ab}, g^{ab}
  - $v^a w^b$, falls v^a und w^a Tensoren 1. Stufe sind
  - Das Kronecker-Symbol δ^b_a ist Tensor 2. Stufe. Dann muss gelten:

$$\delta^b_a = J^{c'}_a J^b_{d'}\delta^{d'}_{c'} \tag{5.57}$$

Beweis:

$$J^{c'}_a J^b_{d'}\delta^{d'}_{c'} = J^{c'}_a J^b_{c'} = \delta^b_a \qquad \text{q.e.d.}$$

- Abschließende Bemerkung:

  Hier werden Tensoren im 3-dimensionalen Ortsraum (Euklidischer Raum) betrachtet.

  Der 3-dimensionale Raum ist der Raum in dem die Klassische Mechanik dargestellt wird. Die Objekte der Klassischen Mechanik sind somit die hier besprochenen Tensoren.

  In der Elektrodynamik wird bevorzugt ein 4-dimensionale Raum, der sogenannte Minkowski-Raum verwendet. Für die Tensoren dieses Raumes gelten analoge Regeln. Die Tensoren im Minkowski-Raum werden auch Lorentz-Tensoren genannt.

  Die Einstein-Gravitationstheorie (Allgemeine Relativitätstheorie) wird in einem 4-dimensionalen gekrümmten Raum dargestellt, dem sogenannten Riemann-Raum. Auch in diesem Raum gelten analoge Regeln. Dort werden die Tensoren Riemann-Tensoren genannt.

Kapitel 6

Spezielle Funktionen

Spezielle Funktionen treten häufig in der Physik auf, insbesondere in der Quantenmechanik und in der Elektrodynamik. In diesem Kapitel wird eine gewisse Gruppe der speziellen Funktionen, sog. orthogonale Funktionen behandelt: Legendre-Polynome, Bessel-Funktion, Hermite-Polynome und Laguerre-Polynome. Wie man mit der Fourier-Reihe eine Funktion oder ein Signal auf dem Intervall von $-\pi$ bis π in einzelne Ebene Wellen zerlegen kann, kann man eine Funktion mittels der orthogonalen Funktionen in verschiedenen "Moden" zerlegen, z.B. auf dem Intervall von -1 bis 1 (Legendre-Polynome), von 0 bis eine Konstante c (Bessel-Funktion), von $-\infty$ bis ∞ (Hermite-Polynome) und von 0 bis ∞ (Laguerre-Polynome).

1 Legendre-Funktionen

Die Legendre-Funktion tritt bei der Lösung der Laplace-Gleichung in Polarkoordinaten auf. Sie spielt eine wichtige Rolle bei der Darstellung des Drehimpulses in der Quantenmechanik.

1.1 Legendre-Gleichung

Die folgende gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung für y als Funktion von x wird als Legendre-Differentialgleichung bezeichnet:

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \lambda y = 0 \tag{6.1}$$

wobei λ eine Konstante ist. Durch Teilung durch $1-x^2$ können wir den Koeffizient von y'' normieren,

$$y'' - \frac{2x}{1-x^2}y' + \frac{\lambda}{1-x^2}y = 0 \tag{6.2}$$

Die Gl. (6.2) hat eine Singularität bei $x = \pm 1$ und y ist ableitbar auf dem Intervall $-1 < x < 1$. Nun entwickeln wir y um den Ursprung $x = 0$ in die Taylor-Reihe mit den Koeffizienten a_j,

$$y = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j \tag{6.3}$$

Die Ableitungen y' und y'' sind

$$y' = \sum_{j=0}^{\infty} j a_j x^{j-1} \tag{6.4}$$

$$y'' = \sum_{j=0}^{\infty} j(j-1) a_j x^{j-2} \tag{6.5}$$

Wir setzen die Gl. (6.4) und (6.5) in die Gl. (6.1) ein,

$$\sum_{j=0}^{\infty} j(j-1)a_j x^{j-2} - \sum_{j=0}^{\infty} \left(j(j+1) - \lambda\right) a_j x^j = 0 \tag{6.6}$$

Der erste Term auf der linken Seite ist Null bei $j = 0$ und $j = 1$. Die Summe beginnt daher mit $j = 2$. Nach einer Index-Transformation $j \to j - 2$ im zweiten Term folgt

$$\sum_{j=2}^{\infty} \left[j(j-1)a_j - \left((j-2)(j-1) - \lambda\right) a_{j-2}\right] x^{j-2} = 0 \tag{6.7}$$

Die Gl. (6.7) muss für beliebige x auf dem Intervall $-1 < x < 1$ bestehen. Somit müssen alle Koeffizienten verschwinden,

$$a_j = \frac{(j-2)(j-1) - \lambda}{j(j-1)} a_{j-2} \qquad (j = 2, 3, \cdots) \tag{6.8}$$

Wenn der Koeffizient a_0 festgelegt wird, werden die anderen Koeffizienten $a_2, a_4, a_6, \cdots$ bestimmt. Wenn a_1 festgelegt wird, werden die Koeffizienten $a_3, a_5, a_7, \cdots$ ebenfalls bestimmt. Die Legendre-Gleichung hat deshalb zwei unabhängige Lösungen: (1) die erste Lösung y_1 bei $a_0 \neq 0$ und $a_1 = 0$,

$$y_1 = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k} x^{2k} \tag{6.9}$$

und (2) die zweite Lösung y_2 bei $a_0 = 0$ und $a_1 \neq 0$,

$$y_2 = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1} x^{2k+1} \tag{6.10}$$

Wir prüfen den Konvergenzradius für die erste Lösung y_1. Das Verhältnis der Nachbarterme ist aus der Rekursionsgleichung (Gl. 6.8)

$$\left| \frac{a_{2k+2} x^{2k+2}}{a_{2k} x^{2k}} \right| = \left| \frac{2k(2k+1) - \lambda}{(2k+2)(2k+1)} x^2 \right| \tag{6.11}$$

Das verhält sich wie x^2 aus der Grenzbetrachtung $k \to \infty$ und die Reihe (Gl. 6.9) konvergiert. Ebenfalls kann man die Konvergenz für y_2 im Radius $|x| < 1$ zeigen. Bei einem speziellen Wert von λ wird entweder y_1 oder y_2 sogar als Polynom mit endlich vielen Termen ausgedrückt.

1.2 Legendre-Polynome (Legendre-Funktion erster Gattung)

Nehmen wir an, dass die Konstante λ in der Legendre-Gleichung (6.1) als Kombination der ganzen Zahlen wie folgt ausgedrückt wird:

$$\lambda = n(n+1) \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots) \tag{6.12}$$

Wir verschieben den Index in der Rekursionsgleichung (Gl. 6.8) wie $j \to j + 2$,

$$a_{j+2} = \frac{j(j+1) - n(n+1)}{(j+2)(j+1)} a_j \qquad (j = 0, 1, 2, \cdots) \tag{6.13}$$

Dann sind die Koeffizienten Null bei $j \geq n + 2$,

$$a_{n+2} = a_{n+4} = a_{n+6} = \cdots = 0 \tag{6.14}$$

Also ist y_1 (oder y_2) ein Polynom mit endlich vielen Termen. Das Polynom wird als Legendre-Polynom oder Legendre-Funktion erster Gattung bezeichnet. Für eine gerade Zahl n ist die Lösung y_1 das Legendre-Polynom und die andere Lösung y_2 ist eine unendliche Reihe. Für eine ungerade Zahl n ist y_2 das Legendre-Polynom und y_1 ist eine unendliche Reihe.

Wir schreiben nun die Rekursionsgleichung (Gl. 6.13) wie folgt:

$$a_j = -\frac{(j+2)(j+1)}{(n-j)(n+j+1)} a_{j+2} \tag{6.15}$$

und setzen $n-2$, $n-4$, $\cdots$, $n-2k$ in j ein,

$$a_{n-2} = -\frac{n(n-1)}{2\cdot(2n-1)} a_n \tag{6.16}$$

$$a_{n-4} = -\frac{(n-2)(n-3)}{4\cdot(2n-3)} a_{n-2} \tag{6.17}$$

$$\vdots \tag{6.18}$$

$$a_{n-2k} = -\frac{(n-2k+2)(n-2k+1)}{2k\cdot(2n-2k+1)} a_{n-2k+2} \tag{6.19}$$

Wir multiplizieren die Gl. (6.16)-(6.19) miteinander. Die Koeffizienten a_{n-2}, a_{n-4}, $\cdots$, a_{n-2k+2} heben sich auf, und es bleibt nur ein Term bei $n-2k$,

$$a_{n-2k} = \frac{(-1)^k}{2\cdot 4\cdots(2k)} \frac{n(n-1)\cdots(n-2k+1)}{(2n-1)(2n-3)\cdots(2n-2k+1)} a_n \tag{6.20}$$

Der Wert von a_n bleibt zwar unbestimmt, aber herkömmlich benutzt man die Normierung für a_n so, dass der Legendre-Polynom $y_1 = 1$ (oder $y_2 = 1$) bei $x = 1$ wird:

$$a_n = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} \tag{6.21}$$

Wir schreiben die Gl. (6.20) mit Hilfe der Relation $2\cdot 4\cdots(2k) = 2^k k!$

$$a_{n-2k} = \frac{(-1)^k}{2^n k!} \frac{(2n-2k)!}{(n-2k)!(n-k)!} \tag{6.22}$$

Damit bekommen wir eine explizite Form für das Legendre-Polynom:

$$P_n(x)\frac{1}{2^n} = \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^k}{2^n k!} \frac{(2n-2k)!}{(n-2k)!(n-k)!} x^{n-2k} \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots) \tag{6.23}$$

wobei das Symbol $[n/2]$ die größte ganze Zahl unterhalb $n/2$ bedeutet, d.h. $[n/2] = n/2$ für eine gerade Zahl n und $[n/2] = (n-1)/2$ für eine ungerade Zahl n. Die ersten Legendre-Polynome bis $n = 5$ sind:

$$P_0(x) = 1 \tag{6.24}$$

$$P_1(x) = x \tag{6.25}$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \tag{6.26}$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) \tag{6.27}$$

$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3) \tag{6.28}$$

$$P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x) \tag{6.29}$$

$$\tag{6.30}$$

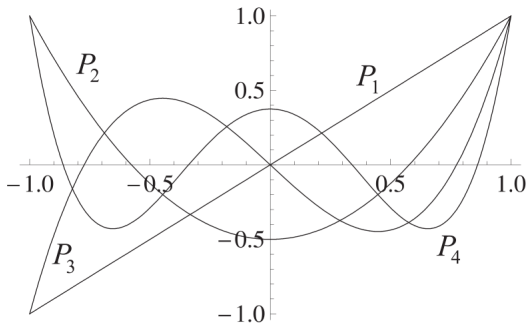


Abbildung 6.1: Legendre-Polynome $P_1(x)$, $P_2(x)$, $P_3(x)$ und $P_4(x)$.

Die Fig. 6.1 zeigt die Grafik von $P_1(x)$, $P_2(x)$, $P_3(x)$ und $P_4(x)$. $P_n(x)$ ist symmetrisch bei einer geraden Zahl n, und anti-symmetrisch bei einer ungeraden Zahl n. Am Rand sind die Legendre-Polynome $P_n(1) = 1$ und $P_n(-1) = (-1)^n$.

Legendre-Funktion zweiter Gattung

Die andere Lösung der Legendre-Gleichung bei $\lambda = n(n+1)$ ist kein Polynom, sondern eine unendliche Reihe $Q_n(x)$. Sie wird als Legendre-Funktion zweiter Gattung bezeichnet. Die Koeffizienten a_j in $Q_n(x)$ werden aus der Rekursionsgleichung (Gl. 6.8) bestimmt. Für den Anfangswert von a_0 und a_1 nimmt man herkömmlich folgende Werte. Bei einer geraden Zahl $n = 2m$

$$a_1 = \frac{(-1)^m\, 2^{2m}\, (m!)^2}{(2m)!} \tag{6.31}$$

und bei einer ungeraden Zahl $n = 2m + 1$

$$a_0 = \frac{(-1)^{m+1}\, 2^{2m}\, (m!)^2}{(2m+1)!} \tag{6.32}$$

Die ersten Legendre-Funktionen zweiter Gattung sind

$$Q_0(x) = \frac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x} \tag{6.33}$$

$$Q_1(x) = \frac{x}{2} \log \frac{1+x}{1-x} - 1 \tag{6.34}$$

$$Q_2(x) = \frac{3x^2-1}{4} \log \frac{1+x}{1-x} - \frac{3}{2}x \tag{6.35}$$

$$Q_3(x) = \frac{5x^3-3x}{4} \log \frac{1+x}{1-x} - \frac{5}{2}x^2 + \frac{2}{3} \tag{6.36}$$

1.3 Darstellungen und Formeln

1.3.1 Rodrigues-Formel

Die Legendre-Polynome können aus der Rodrigues-Formel hergeleitet werden:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2-1)^n \tag{6.37}$$

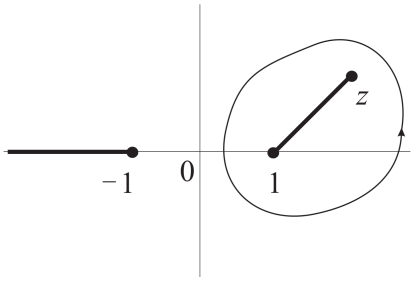


Abbildung 6.2: Kontur für das Schläfli-Integral. Man vermeidet die Linie zwischen z und 1 und zwischen -1 und $-\infty$.

Für den Beweis entwickeln wir $(x^2-1)^n$ mit den Binomialkoeffizienten ${}_nC_k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$,

$$\frac{1}{2^n n!}\sum_{k=0}^{[n/2]} {}_nC_k(-1)^k \frac{d^n}{dx^n}x^{2n-2k} = \frac{1}{2^n n!}\sum_{k=0}^{[n/2]} {}_nC_k(-1)^k(2n-2k)\cdots(n-2k+1)^{n-2k} \tag{6.38}$$

Wir schreiben $(x^2-1)^n$ wie $(x^2-1)^n = (x+1)^n(x-1)^n$ und leiten das n-fach nach x ab. Bei $x=1$ bleibt nur der Term mit $n!$ (n-fach Ableitung von $(x-1)^n$). Daraus folgt

$$P_n(1) = \frac{1}{2^n n!}\cdot n!\cdot(1+1)^n \tag{6.39}$$

$$= 1 \tag{6.40}$$

Aus der Relation $P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$ folgt auch die Symmetrie oder die Anti-Symmetrie,

$$P_n(-1) = (-1)^n \tag{6.41}$$

1.3.2 Schläfli-Integral

Wir kombinieren die Rodrigues-Formel und die Cauchy-Integralformel für die Ableitung höherer Ordnung und bekommen eine Integraldarstellung der Legendre-Polynome,

$$P_n(z) = \frac{1}{2^n\, 2\pi i}\oint \frac{(\zeta^2-1)^n}{(\zeta-z)^{n+1}}d\zeta \tag{6.42}$$

Die Kontur der Integration ist eine geschlossene Kurve um z. Dieses Integral wird als Schläfli-Integral bezeichnet. Die Gl. (6.42) bietet eine Methode, um die Legendre-Polynome von einer ganzen Zahl n auf eine reelle Zahl ν zu verallgemeinern:

$$P_\nu(z) = \frac{1}{2^\nu\, 2\pi i}\oint \frac{(\zeta^2-1)^\nu}{(\zeta-z)^{\nu+1}}d\zeta \tag{6.43}$$

Der Integrand ist eine multiwertige Funktion bei einer reellen Zahl ν, und wir müssen die Integralkontur vorsichtig wählen, um Diskontinuität wie Schnitt oder Bifurkation zu vermeiden. Eine mögliche Auswahl der Integralkontur wird in der Fig. 6.2 gezeigt. Die verallgemeinerte Funktion $P_\nu(z)$ (Gl. 6.43) ist die Lösung der Legendre-Gleichung:

$$(1-z^2)y''(z) - 2zy'(z) + \nu(\nu+1)y(z) = 0 \tag{6.44}$$

Für den Beweis leiten wir den Integranden mit Hilfe der Gl. (6.44) ab, und arrangieren das Ergebnis in die Form der gesamten Ableitung

$$\frac{d}{d\zeta}\left(\frac{(\zeta^2-1)^{\nu+1}}{(\zeta-z)^{\nu+2}}\right) \tag{6.45}$$

1.3.3 Erzeugende Funktion

Die Legendre-Polynome können auf eine Funktion zusammengepackt werden. Wir entwickeln die Funktion $1/\sqrt{1-2xh+h^2}$ nach h in die Taylor-Reihe. Dabei bekommen wir die Legendre-Polynome als Koeffizienten der Reihe. Diese Funktion wird als Erzeugende Funktion der Legendre-Polyome bezeichnet:

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xh+h^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)h^n \qquad (|2hx-h^2|<1) \tag{6.46}$$

Für den Beweis benutzen wir die folgende Rekursionsformel:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{1-y}} &= 1+\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{y^2}{2!}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{y^3}{3!}+\cdots && (6.47)\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2k-1)!!}{2^k}\frac{y^k}{k!} && (6.48)\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2}y^k \quad (|y|<1) && (6.49)
\end{aligned}$$

Wir setzen $2xh-h^2$ in y ein und entwickeln die linke Seite der Gl. (6.46),

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{1-2xh+h^2}} &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2k)!}{2^{2k}\,(k!)^2}h^k(2x-h)^k && (6.50)\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{k}\frac{(2k)!\,(-1)^l}{2^{k+l}\,l!\,(k-l)!\,k!}x^{k-l}h^{k+l} && (6.51)\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{[n/2]}\frac{(-1)^l(2n-2l)\cdots(n-2l+1)}{2^n\,l!\,(n-l)!}x^{n-2l}h^n && (6.52)\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)h^n && (6.53)
\end{aligned}$$

1.3.4 Trigonometrische Darstellung

Da die Legendre-Polynome auf dem Intervall von -1 bis 1 definiert sind, kann man mit einem Winkel θ (wobei $x=\cos\theta$) die Legendre-Polynome ausdrücken. Wir schreiben $1-2xh+h^2$ in die Form $1-2xh+h^2=(1-he^{i\theta})(1-he^{-i\theta})$. Die erzeugende Funktion (Gl. 6.46) wird dann:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{1-2xh+h^2}} &= \frac{1}{\sqrt{1-he^{i\theta}}}\frac{1}{\sqrt{1-he^{-i\theta}}} && (6.54)\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2}h^k e^{ik\theta}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(2l)!}{2^{2l}(l!)^2}h^l e^{-il\theta} && (6.55)\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{n}\frac{(2l)!(2n-2)!}{2^{2n}(l!)^2\left((n-l)!\right)^2}e^{i(n-2l)\theta}h^n && (6.56)
\end{aligned}$$

wobei wir n als $n=k+l$ eingesetzt haben. $P_n(\cos\theta)$ ist eine reelle Funktion. Wir bekommen die trigonometrische Darsellung der Legendre-Polynome aus dem Vergleich mit der Gl. (6.46),

$$P_n(\cos\theta)=\sum_{l=0}^{n}\frac{(2l)!\,(2n-2l)!}{2^{2n}\,(l!)^2\,\left((n-l)!\right)^2}\cos\left[(n-2l)\theta\right] \tag{6.57}$$

Die explizite Form bei $n = 1, 2, 3, 4$ sind:

$$P_1(\cos\theta) = \cos\theta \tag{6.58}$$
$$P_2(\cos\theta) = \frac{1}{4}(3\cos 2\theta + 1) \tag{6.59}$$
$$P_3(\cos\theta) = \frac{1}{8}(5\cos 3\theta + 3\cos\theta) \tag{6.60}$$
$$P_4(\cos\theta) = \frac{1}{64}(35\cos 4\theta + 20\cos 2\theta + 9) \tag{6.61}$$

1.3.5 Rekursionsformeln

Die Legendre-Polynome haben die folgenden Rekursionsformeln:

$$(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0 \tag{6.62}$$
$$P'_{n+1}(x) - 2xP'_n(x) + P'_{n-1}(x) = P_n(x) \tag{6.63}$$
$$P'_{n+1}(x) - xP'_n(x) = (n+1)P_n(x) \tag{6.64}$$
$$xP'_n(x) - P'_{n-1}(x) = nP_n(x) \tag{6.65}$$

wobei $n \geq 0$. Für den Beweis der Gl. (6.62) leiten wir die erzeugende Funktion (Gl. 6.46) nach h ab,

$$\frac{x-h}{(1-2xh+h^2)^{3/2}} = \sum_{n=1}^{\infty} nP_n(x)h^{n-1} \tag{6.66}$$

und dann multiplizieren die beiden Seiten mit $1 - 2xh + h^2$.

$$(x-h)\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)h^n = (1-2xh+h^2)\sum_{n=1}^{\infty} nP_n(x)h^{n-1} \tag{6.67}$$

Aus dem Vergleich des Koeffizienten von h^n ergibt sich die Gl. (6.62).

Die Gl. (6.62) wird aus der Gl. (6.46) hergeleitet. Wir leiten die Gl. (6.46) nach x ab und multiplizieren mit $1 - 2xh + h^2$,

$$\frac{h}{\sqrt{1-2xh+h^2}} = (1-2xh+h^2)\sum_{n=0}^{\infty} P'_n(x)h^n \tag{6.68}$$

Da die linke Seite $\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)h^{n+1}$ ist, vergleichen wir den Koeffizienten von h^{n+1} und leiten die Rekursionsformel (Gl. 6.63) her. Die Gl. (6.64) und (6.65) werden aus der Ableitung der Gl. (6.62) nach x und dann der Kombination mit der Gl. (6.63) hergeleitet.

1.4 Entwicklung nach Legendre-Polynomen

Wie eine glatte Funktion auf einem endlichen Intervall nach den trigonometrischen Funktionen in die Fourier-Reihe entwickelt werden kann, kann eine glatte Funktion, die auf dem Interval $-1 < x < 1$ definiert wird, nach den Legendre-Polynomen entwickelt und zerlegt werden. Diese Art der Entwicklung wird als Legendre-Reihe bezeichnet und wie folgt ausgedrückt:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n P_n(x) \tag{6.69}$$

Die Koeffizienten werden aus der folgenden Integration bestimmt:

$$A_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{1} f(x) P_n(x) dx \tag{6.70}$$

Da $P_n(x)$ ein Polynom n-ter Ordnung ist, kann mann die Legendre-Reihe (Gl. 6.69) als Umsortierung der Taylor-Reihe betrachten. Man kann deshalb die Potenzreihenentwicklung einer Funktion um den Ursprung $x = 0$ sowohl mit der Taylor-Reihe als auch mir der Legendre-Reihe darstellen.

Wir erinnen uns daran, dass die Orthogonalität und die Normierbarkeit der trigonometrischen Funktionen eine wichtige Rolle bei der Koeffizientenbestimmung der Fourier-Reihe spielt. Die Legedre-Polynome besitzen ebenfalls die Eigenschaft der Orthogonaliät und der Normierbarkeit,

$$(P_n, P_m) := \int_{-1}^{1} P_n(x) P_m(x) dx = \frac{2}{2n+1} \delta_{n,m} \tag{6.71}$$

Der Ausdruck (P_n, P_m) kann als inneres Produkt der Funktionen P_n und P_m betrachtet werden. Wir setzen die Gl. (6.69) in die beiden Seiten der Gl. (6.71) ein, und bekommen den Ausdruck der Koeffizienten (Gl. 6.70) mit $n \to m$.

Es folgt der Beweis der Orthogonalität in der Gl. (6.71). Wir multiplizieren die Legendre-Gleichung mit dem Legendre-Polynom $P_m(x)$,

$$(1-x^2) P_m P_n'' - 2x P_m P_n' + n(n+1) P_m P_n = 0 \tag{6.72}$$

Wir tauschen den Index zwischen n und m,

$$(1-x^2) P_n P_m'' - 2x P_n P_m' + n(n+1) P_n P_m = 0 \tag{6.73}$$

und ziehen voneinander ab,

$$\frac{d}{dx} \left((1-x^2)(P_m P_n' - P_n P_m') \right) = (m(m+1) - n(n+1)) P_m P_n \tag{6.74}$$

Nun integrieren wir die Gl. (6.74) von $x = -1$ bis $x = 1$. Die rechte Seite verschwindet, deshalb besteht

$$(m(m+1) - n(n+1)) \int_{-1}^{1} P_m(x) P_n(x) = 0 \tag{6.75}$$

Bei $n \neq m$ sind die Funktionen P_n und P_m zueinander orthogonal. Bei $n = m$ bekommen wir den Normierungsfaktor. Wir quadrieren die erzeugende Funktion (Gl. 6.46) und integrieren von -1 bis 1. Zusammen mit der Orthogonalität bekommen wir

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{1 - 2xh + h^2} = \sum_{n=0}^{\infty} h^{2n} \int_{-1}^{1} \left(P_n(x) \right)^2 dx \tag{6.76}$$

Die linke Seite kann wie folgt evaluiert werden:

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{1 - 2xh + h^2} = \frac{1}{h} \log \frac{1+h}{1-h} \tag{6.77}$$

$$= 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^{2n}}{2n+1} \tag{6.78}$$

Wir vergleichen den Koeffizient von h^{2n} und leiten die Gl. (6.71) bei $n = m$ her.

1.5 Zugeordnete Legendre-Funktion

Ableitungen der Legendre-Funktionen (mit einem zusätzlichen Faktor) sind wiederum eine Lösung der Legendre-Gleichung. Die folgende Gleichung wird als zugeordnete Legendre-Gleichung bezeichnet:

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \left(n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right) y = 0 \tag{6.79}$$

wobei $n = 0, 1, 2, \cdots$, und $m = 0, 1, \cdots, n$ sind. Die Gl. (6.79) hat zwei unabhängigen Lösungen: $P_n^m(x)$ (zugeordnete Legendre-Funktion erster Gattung) und $Q_n^m(x)$ (zweiter Gattung). Sie sind Ableitungen der Legendre-Funktionen $P_n(x)$ bzw. $Q_n(x)$ mit einer Gewichtung:

$$P_n^m(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dx^m} P_n(x) \tag{6.80}$$

$$Q_n^m(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dx^m} Q_n(x) \tag{6.81}$$

Wir können diese Lösungen wie folgt prüfen. Wir schreiben $y(x)$ mit der Gewichtung $w(x)$ wie folgt:

$$y(x) = (1-x^2)^{m/2}\, w(x) \tag{6.82}$$

und berechnen die Ableitungen y' und y'',

$$y' = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} w' - m(1-x^2)^{\frac{m}{2}-1} xw \tag{6.83}$$

$$y'' = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} w'' - 2m(1-x^2)^{\frac{m}{2}-1} xw' + m(m-2)(1-x^2)^{\frac{m}{2}-2} x^2 w - m(1-x^2)^{\frac{m}{2}-1} w \tag{6.84}$$

Wir setzen die Gl. (6.83) und (6.84) in die Gl. (6.79),

$$(1-x^2)w'' - 2(m+1)xw' + (n-m)(n+m+1)w = 0 \tag{6.85}$$

Wir definieren eine Funktion $v(x)$, die eine Lösung der Legendre-Gleichung ist,

$$(1-x^2)v'' - 2xv' + n(n+1)v = 0 \tag{6.86}$$

und leiten die Gl. (6.86) m-fach nach x ab. Wir benutzen die Leibniz-Formel:

$$D^n(fg) = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k (D^k f)(D^{n-k} g) \tag{6.87}$$

wobei D den Differentialoperator ist, und bekommen

$$(1-x^2)\frac{d^{m+2}\, v}{dx^{m+2}} - 2(m+1)x\frac{d^{m+1}\, v}{dx^{m+1}} + (n-m)(n+m+1)\frac{d^m\, v}{dx^m} = 0 \tag{6.88}$$

Wir vergleichen die Gl. (6.88) mit der Gl. (6.85) und bekommen

$$w = \frac{d^m\, v}{dx^m} \tag{6.89}$$

Nun setzen wir das Legendre-Polynom P_n oder Q_n in die Funktion v ein. Aus den Gl. (6.89) und (6.82), bekommen wir die Gl. (6.80) und (6.81). Da P_n ein Polynom n-ter Ordnung ist, verschwinden die zugeordneten Legendre-Polynomen bei $m > n$, also $P_n^m(x) = 0$ (nach der Gl. 6.80).

1.6 Laplace-Gleichung im Polarkoordinatensystem

Die Laplace-Gleichung für eine Funktion $u(r, \theta, \phi)$ wird in Polarkoordinaten wir folgt geschrieben:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\phi^2} = 0 \tag{6.90}$$

Wir lassen den Faktor r^{-2} weg, da er in allen Termen auftritt, und wir setzen eine neue Variable $\mu = \cos\theta$. Die Ableitung nach θ erfolgt:

$$\frac{\partial}{\partial\theta} = \frac{\partial\mu}{\partial\theta}\frac{\partial}{\partial\mu} \tag{6.91}$$

$$= -\sin\theta\frac{\partial}{\partial\mu} \tag{6.92}$$

Die Gl. (6.90) ist dann

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial\mu}\left(\left(1-\mu^2\right)\frac{\partial u}{\partial\mu}\right) + \frac{1}{1-\mu^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\phi^2} = 0 \tag{6.93}$$

Mit dem Ansatz der Variablentrennung $u = R(r)M(\mu)\Phi(\phi)$ wird die Laplace-Gleichung wie folgt geschrieben:

$$\frac{1-\mu^2}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2R'\right) + \frac{1-\mu^2}{M}\frac{d}{d\mu}\left((1-\mu^2)M'\right) = -\frac{\Phi''}{\Phi} \tag{6.94}$$

Diese Gleichung kann mit einer Konstante evaluiert werden, da die linke Seite unabhängig von ϕ ist, und die rechte Seite unabhängig von r und μ ist. Wir setzen m^2 als Konstante ein, somit bekommen wir zwei Gleichungen:

$$\Phi'' = -m^2\Phi \tag{6.95}$$

$$-\frac{1}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2R'\right) = \frac{1}{M}\frac{d}{d\mu}\left((1-\mu^2)M'\right) - \frac{m^2}{1-\mu^2} \tag{6.96}$$

Die Lösung der Gl. (6.95) ist $\Phi = e^{im\phi}$. Aus der Periodizität mit 2π für ϕ darf m nur eine ganze Zahl sein. Die Variablen in der Gl. (6.96) sind getrennt. Wir evaluieren die Gl. (6.96) als $-l(l+1)$, und bekommen wiederum zwei Gleichungen,

$$\frac{d}{dr}\left(r^2R'\right) = l(l+1)R \tag{6.97}$$

$$\frac{d}{d\mu}\left((1-\mu^2)M'\right) + \left(l(l+1) - \frac{m^2}{1-\mu^2}\right)M = 0 \tag{6.98}$$

Die Lösungen für R in der Gl. (6.97) sind r^l und r^{-l-1}. Die Lösungen für M in der Gl. (6.98) sind die zugeordneten Legendre-Funktionen. Die allgemeine Lösung der Laplace-Gleichung ist somit

$$u = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{l}\left(a_l r^l + b_l r^{-(l+1)}\right)\left(c_{lm}P_l^m(\cos\theta) + d_{lm}Q_l^m(\cos\theta)\right)e^{im\phi} \tag{6.99}$$

wobei die Koeffizienten aus der Randbedingung bestimmt werden müssen.

1.7 Kugelflächenfunktionen

Die Kugelflächenfunktionen werden wie folgt definiert:

$$Y_l^m(\theta,\phi) = (-1)^{\frac{m+|m|}{2}}\left(\frac{(2l+1)\,(l-|m|)!}{4\pi(l+|m|)!}\right)^{1/2}P_l^{|m|}(\cos\theta)e^{im\phi} \tag{6.100}$$

wobei $l = 0, 1, 2, \cdots$ und $m = -l, -l+1, \cdots, l$ sind. Wir müssen nun die zugeordneten Legendre-Funktionen mit einem negativen Index m definieren. Wir kombinieren die Gl. (6.80) und (6.37).

$$P_l^m(x) = \frac{1}{2^l\, l!} \left(1 - x^2\right)^{\frac{|m|}{2}} \frac{d^{l+|m|}}{dx^{l+|m|}} \left(x^2 - 1\right)^l \tag{6.101}$$

wobei die Abhängigkeit von m als $|m|$ ausgedrückt wird. Die Kugelflächenfunktionen besitzen die Eigenschaft der Orthogonalität und Normierbarkeit,

$$\int Y_l^m(\Omega) \left(Y_{l'}^{m'}(\Omega)\right)^* d\Omega = \delta_{ll'}\delta_{mm'} \tag{6.102}$$

Hier ist Ω ein Raumwinkel mit zwei Komponenten (θ, ϕ), und $d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi$.

Wir prüfen die Orthogonalität. Bei $m \neq m'$ ergibt die Integration der Funktionen $e^{im\phi}$ und $e^{-im\phi}$ von $\phi = 0$ bis 2π Null. Bei $m = m'$ reduziert sich das Orthogonalitätsproblem auf die Orthogonalität der zugeordneten Legendre-Funktionen,

$$\begin{aligned} \int \sin\theta P_l^m(\cos\theta) P_{l'}^m(\cos\theta) d\theta &= \int_{-1}^{1} P_l^m(\mu) P_{l'}^m(\mu) d\mu & (6.103) \\ &= 0 & (6.104) \end{aligned}$$

bei $l \neq l'$. Für den Beweis setzen wir die Gl. (6.80) (mit $n \to l$) in y in der Gl. (6.79) (auch mit $n \to l$) ein, benutzen die Variable $\mu = \cos\theta$, multiplizieren mit $P_{l'}^m(\mu)$ aus der linken Seite und integrieren von -1 bis 1,

$$\begin{aligned} &\int_{-1}^{1} P_{l'}^m(\mu)(1-\mu^2)\frac{d^2}{d\mu^2} P_l^m(\mu) d\mu - 2\int_{-1}^{1} P_{l'}^m(\mu)\mu\frac{d}{d\mu} P_l^m(\mu) d\mu + \\ &\quad l(l+1)\int_{-1}^{1} P_{l'}^m(\mu) P_l^m(\mu) d\mu - m^2 \int_{-1}^{1} \frac{P_{l'}^m(\mu) P_l^m(\mu)}{1-\mu^2} d\mu = 0 \end{aligned} \tag{6.105}$$

Wir tauschen l mit l' in der Gl. (6.105) und nehmen die Differenz der beiden Gleichungen,

$$\begin{aligned} &\int_{-1}^{1} \left\{ P_l^m \frac{d}{d\mu}\left((1-\mu^2)\frac{dP_{l'}^m}{d\mu}\right) - P_{l'}^m \frac{d}{d\mu}\left((1-\mu^2)\frac{dP_l^m}{d\mu}\right)\right\} d\mu \\ &\qquad = (l(l+1) - l'(l'+1)) \int_{-1}^{1} P_l^m(\mu) P_{l'}^m(\mu) d\mu \end{aligned} \tag{6.106}$$

Die linke Seite kann aus der Teilintegration evaluiert werden und ist Null, somit besteht die Orthogonalität (Gl. 6.104) bei $l \neq l'$. Der Normierungsfaktor bei $l = l'$ und $m = m'$ kann aus der Wiederholung der Teilintegration hergeleitet werden.

Die Kugelflächenfunktionen sind die Eigenfunktion der Gleichungen für die Drehimpulsoperator $\boldsymbol{L}^2$ (die quadrierte Größe) und L_z (eine Komponente) in der Quantenmechanik. Die Operatoren werden in Polarkoordinaten wie folgt ausdrückt:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{L}^2 &= -\hbar^2 \left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial}{\partial\phi^2}\right) & (6.107) \\ L_z &= -i\hbar\frac{\partial}{\partial\phi} & (6.108) \end{aligned}$$

Die Kugelflächenfunktionen sind die Lösungen der Gleichungen für die Drehimpulsoperatoren,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{L}^2 Y_l^m(\theta,\phi) &= \hbar^2 l(l+1) Y_l^m(\theta,\phi) & (6.109) \\ L_z Y_l^m(\theta,\phi) &= \hbar m Y_l^m(\theta,\phi) & (6.110) \end{aligned}$$

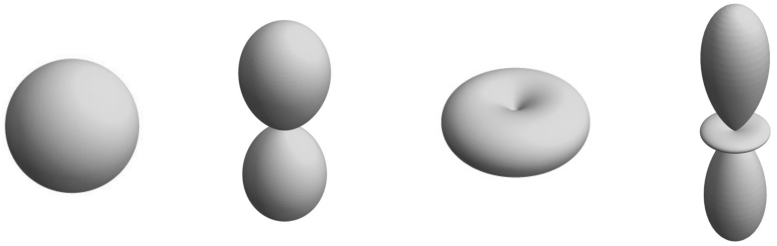


Abbildung 6.3: Der Abstand des Betragsquadrates der Kugelflächenfunktionen $|Y_l^m(\theta,\phi)|^2$ mit den Indizen (l,m).

Die explizite Form der Kugelflächenfunktionen niedriger Ordnungen sind:

$$Y_0^0(\theta,\phi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \tag{6.111}$$

$$Y_1^0(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta \tag{6.112}$$

$$Y_2^0(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{5}{16\pi}}(3\cos^2\theta - 1) \tag{6.113}$$

$$Y_1^1(\theta,\phi) = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta\, e^{i\phi} \tag{6.114}$$

$$Y_2^1(\theta,\phi) = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\sin\theta\,\cos\theta\, e^{i\phi} \tag{6.115}$$

Die Graphik der Kugelflächenfunktion werden in der Fig. 6.3 gezeigt.

2 Bessel-Funktionen

Die Bessel-Funktion tritt bei der Lösung der Laplace-Gleichung in Zylinderkoordinaten auf und spielt eine wichtige Rolle in der Physik.

2.1 Bessel-Differentialgleichung

Die Bessel-Differentialgleichung

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2) = 0 \tag{6.116}$$

hat eine Singularität an $x = 0$, wobei ν eine reelle Zahl ist. Man kann die Lösung um die Singularität in eine Potenzreihe entwickeln,

$$y = x^c \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j \tag{6.117}$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^{c+j} \tag{6.118}$$

Hier ist c eine reelle Konstante. Wir sehen im folgenden, dass $c = \pm\nu$ bestehen muss. Der Koeffizient a_0 ist von Null unterschiedlich, $a_0 \neq 0$.

Wir leiten den Lösungsansatz (Gl. 6.118) nach x ab, und setzen in die Gl. (6.116) ein,

$$y' = \sum_{j=0}^{\infty}(c+j)a_j x^{c+j-1} \tag{6.119}$$

$$y'' = \sum_{j=0}^{\infty}(c+j)(c+j-1)a_j x^{c+j-2} \tag{6.120}$$

Die Bessel-Differentialgleichung wird dann

$$\sum_{j=0}^{\infty}(c+j)(c+j-1)a_j x^{c+j} + \sum_{j=0}^{\infty}(c+j)a_j x^{c+j} + \sum_{j=0}^{\infty}a_j x^{c+j+2} - \sum_{j=0}^{\infty}\nu^2 a_j c^{c+j} = 0 \tag{6.121}$$

Wir gruppieren den ersten, den zweiten und den vierten Terme auf der linken Seite; arrangieren den Koeffizienten; und verschieben den Index j im dritten Term $j \to j-2$,

$$\sum_{j=0}^{\infty}\left((c+j)^2 - \nu^2\right)a_j x^{c+j} + \sum_{j=2}^{\infty}a_{j-2}x^{c+j} = 0 \tag{6.122}$$

Wir trennen die Terme für $j = 0, 1$ von den anderen Termen,

$$(c^2-\nu)^2 a_0 + \left((c+1)^2 - \nu^2\right)a_1 x + \sum_{j=2}^{\infty}\left\{\left((c+j)^2-\nu^2\right)a_j + a_{j-2}\right\}x^j = 0 \tag{6.123}$$

Diese Gleichung muss für einen beliebigen Wert von x bestehen, daher müssen die Koeffizienten aller Terme verschwinden. Nun beachten wir $a_0 \neq 0$, somit

$$c^2 - \nu^2 = 0 \tag{6.124}$$

Die Gl. (6.124) wird als charakteristische Gleichung bezeichnet. Daraus folgt die Konstante $c = \pm\nu$. Der Koeffizient von a_1 ist $(c+1)^2 - \nu^2$. Das ist von Null unterschiedlich so lange $\nu \neq \pm 1/2$ besteht, somit $a_1 = 0$. Im allgemein kann man auch bei $\nu = \pm 1/2$ $a_1 = 0$ setzen, weil die allgemeine Lösung mit zwei unabhängigen Lösungen unter der Annahme $a_0 \neq 0$ und $a_1 = 0$ beschrieben werden kann.

Bei $c = \nu$ gilt aus der Gl. (6.123) die folgende Rekursionsgleichung

$$a_j = -\frac{1}{(\nu+j)^2 - \nu^2}a_{j-2} \tag{6.125}$$

$$= -\frac{1}{j(2\nu+j)}a_{j-2} \tag{6.126}$$

Da wir $a_1 = 0$ gesetzt haben, verschwinden die Koeffizienten ungeradezahliger Indizes, $a_3 = a_5 = \cdots = 0$. Wir müssen also nur die Koeffizienten $a_2, a_4, \cdots$ bestimmen. Die Rekursionsgleichungen sind

$$a_2 = -\frac{1}{1\cdot(\nu+1)\cdot}a_0 \tag{6.127}$$

$$a_4 = -\frac{1}{2\cdot(\nu+2)\cdot 2^2}a_2 \tag{6.128}$$

$$\vdots$$

$$a_{2k} = -\frac{1}{2\cdot(\nu+k)\cdot 2^2}a_{2k-2} \tag{6.129}$$

Wir berechnen das Produkt $a_2 \cdot a_4 \cdots$ mittels der Gl. (6.127)-(6.129). Es bleibt nur eine Relation zwischen a_{2k} und a_0:

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k}{k!(\nu+1)(\nu+2)\cdots(\nu+k)2^{2k}} a_0 \tag{6.130}$$

Hier ist a_0 eine beliebige Konstante, aber es ist vereinbart, a_0 wie folgt zu definieren:

$$a_0 = \frac{1}{2^\nu \Gamma(\nu+1)} \tag{6.131}$$

wobei $\Gamma(x)$ die Gammafunktion ist,

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt \tag{6.132}$$

Wenn $\nu+1$ eine natürliche Zahl ist, ergibt die Gammafunktion die Operation der Fakultät, $\Gamma(\nu+1) = \nu!$. Die erste Gruppe der Lösungen der Bessel-Differentialgleichung ist

$$J_\nu(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(\nu+1)(\nu+2)\cdots(\nu+k)\Gamma(\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \tag{6.133}$$

Aus der Eigenschaft der Gammafunktion $\Gamma(\nu)\nu = \Gamma(\nu+1)$ folgt die Relation

$$\begin{aligned} \Gamma(\nu+1)\,(\nu+1)(\nu+2)\cdots(\nu+k) &= \Gamma(\nu+2)\,(\nu+2)\cdots(\nu+k) && (6.134)\\ &\vdots \\ &= \Gamma(\nu+k+1) && (6.135) \end{aligned}$$

Somit

$$J_\nu(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(\nu+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \tag{6.136}$$

Die Gl. (6.136) ist die Bessel-Funktion erster Gattung der Ordnung ν. Wir prüfen nun den Konvergenzradius. Wir vergleichen die Nachbarterme der Ordnung $\nu+2k$ und $\nu+2k+2$; evaluieren den Grenzwert des Verhältnisses,

$$\begin{aligned} \lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_{2k+2} x^{\nu+2k+2}}{a_{2k} x^{\nu+2k}} \right| &= \lim_{k\to\infty} \frac{1}{(k+1)(\nu+k+1)} \frac{|x|^2}{4} && (6.137)\\ &= 0 && (6.138) \end{aligned}$$

Die Reihe in der Gl. (6.136) konvergiert auf dem Intervall $0 \le x \le \infty$ und jeder Term ist ableitbar.

Bei $c = -\nu$ kann man zeigen, dass die Bessel-Funktionen bei $\nu \to -\nu$ auch Lösungen der Bessel-Gleichung sind:

$$J_{-\nu}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(-\nu+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \tag{6.139}$$

Die zwei Bessel-Funktionen $J_\nu(x)$ und $J_{-\nu}(x)$ sind voneinander linear unabhängig. Das gilt solange ν keine ganze Zahl ist. Die allgemeine Lösung der Bessel-Differetialgleichung ist deshalb als lineare Kombination von $J_\nu(x)$ und $J_{-\nu}(x)$ gegeben,

$$y = c_1 J_\nu(x) + c_2 J_{-\nu}(x) \tag{6.140}$$

Wenn ν eine ganze Zahl ist, sind $J_n(x)$ und $J_{-n}(x)$ nicht mehr linear unabhängig. Wir bekommen $J_{-n}(x)$ aus der Gl. (6.139) wie folgt:

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x) \tag{6.141}$$

oder

$$J_{-n}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(-n+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n} \tag{6.142}$$

Die Gammafunktion divergiert, wenn das Argument Null oder eine negative ganze Zahl ist. Daher verschwinden die Terme bei $k = 0, 1, \cdots, n-1$ in der Gl. (6.142). Wir arrangieren die Summe beginnend mit $k = n$ und setzen $k - n = l$, und dann

$$\begin{aligned} J_{-n}(x) &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+l}}{(n+l)!\Gamma(l+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2l+n} && (6.143) \\ &= (-1)^n \left(\frac{x}{2}\right)^n \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{(n+l)!\, l!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2l} && (6.144) \end{aligned}$$

wobei wir die Relation $\Gamma(l+1) = l!$ für eine natürliche Zahl l benutzt haben. Aus der Gl. (6.136) folgt die rechte Seite der Gl. (6.144) zu $(-1)^n J_n(x)$.

2.2 Variante der Bessel-Funktionen

Bei nicht-ganzzahligen ν kann man die Bessel-Funktionen zweiter Gattung als unabhängige Lösung von $J_\nu(x)$ (statt $J_{-\nu}(x)$) benutzen,

$$Y_\nu(x) = \frac{1}{\sin(\nu\pi)} \left(\cos(\nu\pi) J_\nu(x) - J_{-\nu}(x)\right) \tag{6.145}$$

Diese Funktionen werden auch als Neumann-Funktionen $N_\nu(x)$ bezeichnet.

Die unabhängige Lösung von $J_n(x)$ wird mit der Grenzbetrachtung $\nu \to n$ (wobei n eine ganze Zahl ist) definiert:

$$\begin{aligned} Y_n(x) &= \lim_{\nu \to n} Y_\nu(x) && (6.146) \\ &= \frac{\frac{\partial}{\partial \nu} \left(\cos(\nu\pi) J_\nu(x) - J_\nu(x)\right)\big|_{\nu=n}}{\frac{\partial}{\partial \nu} \sin(\nu\pi)\big|_{\nu=n}} && (6.147) \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{\partial J_\nu(x)}{\partial \nu}\right)_{\nu=n} - \frac{(-1)^n}{\pi} \left(\frac{\partial J_{-\nu}(x)}{\partial \nu}\right)_{\nu=n} && (6.148) \end{aligned}$$

Evalution von $Y_n(x)$ ist möglich, und zwar

$$\begin{aligned} Y_n(x) &= \frac{2}{\pi} J_n(x) \left(\log \frac{x}{2} + \gamma\right) - \frac{1}{\pi} \left(\frac{x}{2}\right)^{-n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k-1)!}{k!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \\ &\quad - \frac{1}{\pi} \left(\frac{x}{2}\right)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,(n+k)!} \left(\phi(k) + \phi(n+k)\right) \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} && (6.149) \end{aligned}$$

Bei $n = 0$

$$Y_0(x) = \frac{2}{\pi} J_0(x) \left(\log \frac{x}{2} + \gamma\right) - \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \phi(k) \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \tag{6.150}$$

Hier wird $\phi(k)$ wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} \phi(k) &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{k} && (6.151) \\ \phi(0) &= 0 && (6.152) \end{aligned}$$

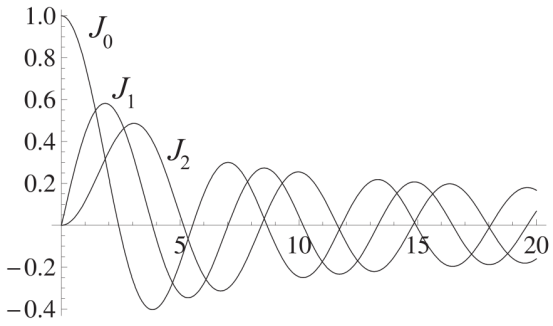


Abbildung 6.4: Bessel-Funktionen erster Gattung $J_0(x)$, $J_1(x)$ und $J_2(x)$.

Das Symbol γ ist die Euler-Konstante,

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} (\phi(n) - \log n) \tag{6.153}$$
$$= 0,57721... \tag{6.154}$$

Daraus bekommen wir die allgemeine Lösung der Bessel-Differentialgleichung für beliebige ν (sowohl ganzzahlig als auch nicht-ganzzahlig).

$$y = c_1 J_\nu(x) + c_2 Y_\nu(x) \tag{6.155}$$

Die folgenden Kombinationen von J_ν und Y_ν

$$H_\nu^{(1)} = J_\nu(x) + iY_\nu(x) \tag{6.156}$$
$$H_\nu^{(2)} = J_\nu(x) - iY_\nu(x) \tag{6.157}$$

werden als Hankel-Funktionen erster bzw. zweiter Gattung bezeichnet. Die Funktionen $J_\nu(x)$, $Y_\nu(x)$, $H_\nu^{(1)}(x)$ und $H_\nu^{(2)}(x)$ werden auch als Zylinderfunktionen bezeichnet.

In der Fig. 6.4 sehen wir die Grafik von $J_0(x)$, $J_1(x)$ und $J_2(x)$. Die Lösungen oder die Nullstellen der Gleichung $J_1(x) = 0$ befinden sich zwischen den Nullstellen der Gleichung $J_0(x) = 0$. Das gilt auch bei den Nullstellen zwischen $J_1(x)$ und $J_2(x)$. Diese Eigenschaft besteht im allgemein zwischen $J_n(x)$ und $J_{n+1}(x)$. Zwischen $J_0(x)$ und $J_1(x)$ besteht eine spezielle Relation:

$$J_0'(x) = -J_1(x) \tag{6.158}$$

wie die Relation zwischen $\cos x$ und $\sin x$, somit trägt $J_0(x)$ den Charakter einer Welle (zylindersymmetrische Welle). Diese Relation gilt nur bei $n = 0$. Die allgemeine Relation über Ableitungen der Bessel-Funktionen wird später erklärt. Die Grafik von $Y_0(x)$, $Y_1(x)$ und $Y_2(x)$ wird in der Fig. 6.5 gezeigt.

Wir führen die analytische Fortsetzung der Bessel-Funktionen erster Gattung in der komplexen Ebene durch, und leiten die modifizierten Bessel-Funktionen erster Gattung $I_\nu(z)$ her. Daraus leiten wir weiter die modifizierten Bessel-Funktionen zweiter Gattung $K_\nu(z)$ her,

$$I_\nu(z) = i^{-\nu} J_\nu(iz) \tag{6.159}$$
$$K_\nu(z) = \frac{\pi}{2} \frac{I_{-\nu}(z) - I_\nu(z)}{\sin(\pi\nu)} \tag{6.160}$$
$$= \frac{\pi}{2} i^{\nu+1} H_\nu^{(1)}(iz) \tag{6.161}$$

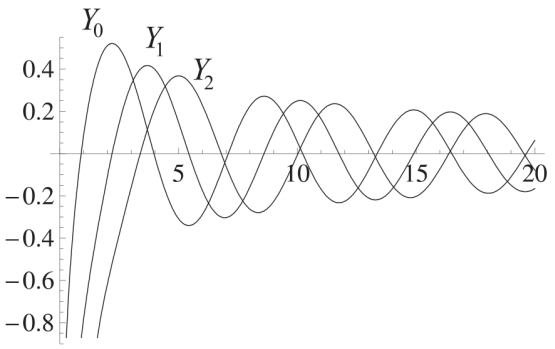


Abbildung 6.5: Bessel-Funktionen zweiter Gattung $Y_1(x)$, $Y_2(x)$ und $Y_3(x)$.

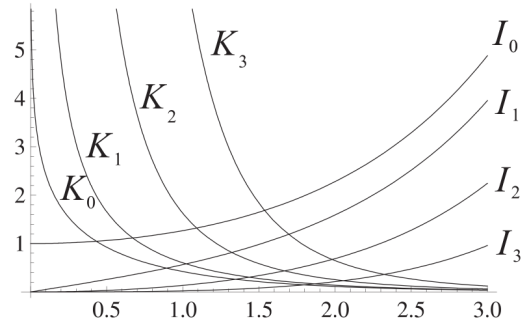


Abbildung 6.6: Modifizierten Bessel-Funktionen erster Gattung I_ν und zweiter Gattung K_ν.

wobei z eine komplexe Zahl ist. Die Funktionen $I_\nu(z)$ und $K_\nu(z)$ sind die Lösungen der folgenden Gleichung (die modifizierte Bessel-Differentialgleichung):

$$z^2\frac{d^2u}{dz^2} + z\frac{du}{dz} - (z^2+\nu^2)u = 0 \tag{6.162}$$

Die modifizierten Bessel-Funktionen erster Gattung können als Potenzreihe entwickelt werden:

$$I_\nu(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!\,\Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k} \tag{6.163}$$

Die Fig. 6.6 zeigt die Grafik der modifizierten Bessel-Fuktionen erster und zweiter Gattungen.

2.3 Rekursionsformeln

Die folgenden Rekursionsformeln gelten für die Bessel-Funktionen:

$$\frac{d}{dx}\left(x^{-\nu}J_\nu(x)\right) = -x^{-\nu}J_{\nu+1}(x) \tag{6.164}$$

$$\frac{d}{dx}\left(x^{\nu}J_\nu(x)\right) = x^{\nu}J_{\nu-1}(x) \tag{6.165}$$

$$xJ'_\nu(x) - \nu J_\nu(x) = -xJ_{\nu+1}(x) \tag{6.166}$$

$$xJ'_\nu(x) + nJ_\nu(x) = xJ_{\nu-1}(x) \tag{6.167}$$

$$J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x) = 2J'_\nu(x) \tag{6.168}$$

$$J_{\nu-1} + J_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x}J_\nu(x) \tag{6.169}$$

Die Gl. (6.164) kann aus der Reihendarstellung (Gl. 6.136) hergeleitet werden.

$$\frac{d}{dx}\left({}^{-\nu}J_\nu(x)\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(\nu+k+1)}\frac{d}{dx}\frac{x^{2k}}{2^{\nu+2k}} \tag{6.170}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k-1)!\,\Gamma(\nu+k+1)}\frac{x^{2k-1}}{2^{\nu+2k-1}} \tag{6.171}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k!\,\Gamma(\nu+1+k+1)}\frac{x^{2k+1}}{2^{\nu+2k+1}} \tag{6.172}$$

$$= -x^{-\nu}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(\nu+1+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+1+2k} \tag{6.173}$$

$$= -x^{-\nu}J_{\nu+1}(x) \tag{6.174}$$

Die Gl. (6.165) kann ebenfalls aus der Potenzreihenentwicklung hergeleitet werden. Die Gl. (6.166) und (6.167) werden aus der Differenzierung der Gl. (6.164) und (6.164) hergeleitet. Die Gl. (6.168) und (6.169) werden aus der Addition und der Subtraktion der Gl. (6.166) und (6.167) hergeleitet. Nicht nur $J_\nu(x)$, sondern auch $Y_\nu(x)$, $H_\nu^{(1)}(x)$ und $H_\nu^{(2)}(x)$ erfüllen diese Rekursionsformeln. Bei $\nu = 0$ wird die Gl. (6.166)

$$J'_0(x) = -J_1(x) \tag{6.175}$$

2.4 Erzeugende Funktion und Integraldarstellung

Die Bessel-Funktionen können in die folgende erzeugende Funktion zusammengepackt werden:

$$\exp\left[\frac{1}{2}x\left(z-\frac{1}{z}\right)\right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n(x)z^n \tag{6.176}$$

Für den Beweis entwickeln wir die linke Seite der Gl. (6.176),

$$e^{\frac{1}{2}xz}\,e^{-\frac{x}{2z}} = \sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{l!}\left(\frac{xz}{2}\right)^l\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\left(\frac{x}{2z}\right)^k \tag{6.177}$$

Wir setzen $l-k=n$ und trennen die Summe in $n \geq 0$ und $n < 0$,

$$e^{\frac{1}{2}xz}\,e^{-\frac{x}{2z}} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k+n)!\,k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}z^n + \sum_{n=-\infty}^{-1}\sum_{k=-n}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k+n)!\,k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}z^n \tag{6.178}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}J_n(x)z^n + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=n}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k-n)!\,k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2k}z^{-n} \tag{6.179}$$

Im zweiten Term in der Gl. (6.179) setzen wir $k - n = m$ ein,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+m}}{m!\,(n+m)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2m}z^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n J_n(x)z^{-n} \tag{6.180}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}J_{-n}(x)z^{-n} \tag{6.181}$$

Daraus folgt die Gl. (6.176).

Das Additionstheorem für die Bessel-Funktionen wird aus der Darstellung mit der erzeugenden Funktion hergeleitet,

$$J_n(x+y) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}J_k(x)J_{n-k}(x) \tag{6.182}$$

Wir sehen, dass die Entwicklung der Funktionen $e^{\frac{1}{2}(x+y)(z-\frac{1}{z})}$ und $e^{\frac{1}{2}x(z-\frac{1}{z})}e^{\frac{1}{2}y(z-\frac{1}{z})}$ gleich ist. Somit

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n(x+y)z^n = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty}J_k(x)z^k J_l(y)z^l \tag{6.183}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty}J_k(x)J_{n-k}(x)z^n \tag{6.184}$$

Der Vergleich der Koeffizienten von z^n ergibt das Additionstheorem.

Wir setzen $z = e^{i\phi}$ und $z^{-1} = e^{-i\phi}$ in die erzeugenden Funktion (Gl. 6.176). Wir sehen, dass $z - z^{-1} = 2i\sin\phi$, und bekommen die folgende Gleichung:

$$e^{ix\sin\phi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n(x)e^{in\phi} \tag{6.185}$$

Wir setzen $x \to ix$ und $z \to -ie^{i\theta}$ in der Gl. (6.176) und bekommen die andere Relation:

$$e^{x\cos\theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}I_n(x)e^{in\theta} \tag{6.186}$$

Es gibt auch Integraldarstellungen der Bessel-Funktionen.

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{i(x\sin\phi - n\phi)}d\phi \tag{6.187}$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(x\sin\phi - n\phi)d\phi \tag{6.188}$$

$$J_{2n}(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(x\sin\phi)\,\cos(2n\phi)d\phi \tag{6.189}$$

$$J_{2n-1}(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(x\sin\phi)\,\sin\left((2n-1)\phi\right)d\phi \tag{6.190}$$

für eine ganze Zahl n. Die Gl. (6.187) wird wie folgt hergeleitet: wir multiplizieren die beiden Seiten der Gl. (6.185) mit $e^{-in\phi}$ und integrieren von $-\pi$ bis π. Die Gl. (6.188) wird wie folgt hergeleitet: wir nehmen den reellen Teil der Gl. (6.187) und halbieren das Intervall mit Hilfe der

Symmetrie. Da $J_n(x)$ eine reelle Funktion ist, verschwindet der imaginäre Teil. Die Gl. (6.189) und (6.190) werden wie folgt hergeleitet. Aus der Gl. (6.187) besteht die Relation

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \left(\cos(x\sin\phi)\cos(n\phi) + \sin(x\sin\phi)\sin(n\phi)\right) d\phi \tag{6.191}$$

Der zweite Term auf der rechten Seite verschwindet bei geradezahligen n, während der erste Term bei nicht-geradezahligen n verschwindet. Aus den Gl. (6.189) und (6.190) folgen die Fourier-Reihen:

$$\cos(x\sin\phi) = J_0(x) + 2\sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(x)\cos(2n\phi) \tag{6.192}$$

$$\sin(x\sin\phi) = 2\sum_{n=1}^{\infty} J_{2n-1}(x)\sin\left((2n-1)\phi\right) \tag{6.193}$$

und die Parseval-Gleichungen:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos^2(x\sin\phi)d\phi = \left(J_0(x)\right)^2 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(J_{2n}(x)\right)^2 \tag{6.194}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin^2(x\sin\phi)d\phi = 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(J_{2n-1})(x)\right)^2 \tag{6.195}$$

Aus den Gl. (6.192)-(6.195) folgen auch

$$\left(J_0(x)\right)^2 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(J_n(x)\right)^2 = 1 \tag{6.196}$$

und

$$|J_0(x)| \leq 1 \tag{6.197}$$

$$|J_n(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (n \geq 1) \tag{6.198}$$

$$\lim_{n\to\infty} J_n(x) = 0 \tag{6.199}$$

Die Schläfli-Integraldarstellung:

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi i}\oint e^{\frac{x}{2}\frac{z-1}{z}} z^{-n-1} dz \tag{6.200}$$

wird aus der Integration der erzeugenden Funktion (Gl. 6.164) entlang einer Kontur um den Ursprung hergeleitet. Bei nicht-ganzzahligen ν wird die Integraldarstellung wie folgt gegeben.

$$J_\nu(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_C e^{\frac{x}{2}\frac{z-1}{z}} z^{-\nu-1} dz \tag{6.201}$$

Für die Integration nehmen wir die Kontur C wie in der Fig. 6.7. Die notwendige und ausreichende Bedingung, dass die Gl. (6.200) und die Funktion in der Gl. (6.136) gleich ist: (a) die Funktion in der Gl. (6.201) erfüllt die Bessel-Differentialgleichung; und dazu (b) die Gl. (6.200) wird die Bessel-Funktionen erster Gattung bei ganzzahligen n. Wir setzen die Gl. (6.201) in die Bessel-Gleichung (Gl. 6.116) ein und leiten nach x ab. Das Integral wird dann als totale Ableitung ausdrückt:

$$\frac{d}{dz}\left\{\exp\left(\frac{x}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right) z^{-\nu}\left(\nu + \frac{x}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\right)\right\} \tag{6.202}$$

Das Integral kann evaluiert werden und es wird als Differenz des Integralwerts zwischen dem Endpunkt und dem Startpunkt der Kontur C gegeben; und zwar ist es Null, da diese Werte aus der Grenzbetrachtung $z \to -\infty$ Null sind.

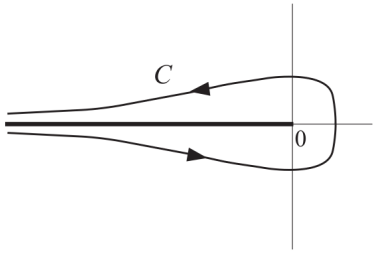


Abbildung 6.7: Kontur C für die Integraldarstellung der Bessel-Funktionen bei nicht-ganzzahligen ν.

2.5 Sphärische Bessel-Funktionen

Wenn die Ordnung halbganzahlig $\nu = n+\frac{1}{2}$ ist, können die Bessel-Funktionen mit den elementaren Funktionen ausgedrückt werden:

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x \tag{6.203}$$

$$J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x \tag{6.204}$$

$$J_{n+\frac{1}{2}}(x) = (-1)^n\sqrt{\frac{2}{\pi}}x^{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^n\left(\frac{\sin x}{x}\right) \tag{6.205}$$

$$J_{-n-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}x^{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^n\left(\frac{\cos x}{x}\right) \tag{6.206}$$

$$Y_{n+\frac{1}{2}}(x)(-1)^{n+1} = J_{-n-\frac{1}{2}} \tag{6.207}$$

$$Y_{-n-\frac{1}{2}}(x)(-1)^{n} = J_{n+\frac{1}{2}}(x) \tag{6.208}$$

Die Funktion $J_{\frac{1}{2}}(x)$ wird aus der Reihendarstellung (Gl. 6.136) hergeleitet,

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma\left(k+\frac{3}{2}\right)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\frac{1}{2}} \tag{6.209}$$

wobei die Gamma-Funktion wie folgt evaluiert werden kann,

$$\Gamma\left(k+\frac{3}{2}\right) = \left(k+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right) \tag{6.210}$$

$$= \left(k+\frac{1}{2}\right)\left(k-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(k-\frac{1}{2}\right) \tag{6.211}$$

$$\vdots$$

$$= \left(k+\frac{1}{2}\right)\left(k-\frac{1}{2}\right)\cdots\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \tag{6.212}$$

$$= \frac{1}{2^{k+1}}(2k+1)(2k-1)\cdots 3\cdot 1\cdot\sqrt{\pi} \tag{6.213}$$

Daraus folgt

$$k!\,\Gamma\left(k+\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2^k}(2k)(2k-2)\cdots 4\cdot 2\cdot\frac{1}{2^{k+1}}(2k+1)(2k-1)\cdots 3\cdot 1\cdot\sqrt{\pi} \tag{6.214}$$

$$= \frac{(2k+1)!}{2^{2k+1}}\sqrt{\pi} \tag{6.215}$$

Somit

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^{\frac{1}{2}}}{(2k+1)!\sqrt{\pi}} x^{2k+1} x^{-\frac{1}{2}} \tag{6.216}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x \tag{6.217}$$

Die Funktion $J_{-\frac{1}{2}}(x)$ wird aus der Rekursionsformel (Gl. 6.165) durch den Einsatz $\nu = \frac{1}{2}$ hergeleitet.

$$J_{-\frac{1}{2}}(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \frac{d}{dx} \left(\sqrt{x} J_{\frac{1}{2}}(x) \right) \tag{6.218}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x \tag{6.219}$$

Die Gl. (6.205) wird aus der Rekursionsformel (Gl. 6.164) hergeleitet.

$$x^{-\nu-1} J_{\nu+1}(x) = -\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left(x^{-\nu} J_\nu(x) \right) \tag{6.220}$$

Wir benutzen die gleiche Rekursionsformel (Gl.6.164) nochmal,

$$x^{-\nu-2} J_{\nu+2}(x) = -\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left(x^{-\nu-1} J_{\nu+1}(x) \right) \tag{6.221}$$

$$= \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^2 \left(x^{-\nu} J_\nu(x) \right) \tag{6.222}$$

Mit Wiederholung bekommen wir die Gl. (6.205). Die Gl. (6.206) wird auch aus der Rekursionsformel (Gl. 6.165) hergeleitet. Die Gl. (6.207) und (6.208) werden aus der Definition (Gl. 6.145) hergeleitet. Wir setzen $\nu = \pm\frac{1}{2}$ und dann

$$Y_{\frac{1}{2}}(x) = -J_{-\frac{1}{2}}(x) \tag{6.223}$$

$$= -\sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x \tag{6.224}$$

$$Y_{-\frac{1}{2}}(x) = J_{\frac{1}{2}}(x) \tag{6.225}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x \tag{6.226}$$

Wir benutzen die Rekursionsformeln (Gl. 6.164) und (Gl. 6.165) mit Wiederholung. Diese Rekursionsformeln gelten auch bei $Y_\nu(x)$.

Die radiale Komponente der Schrödinger-Gleichung für ein freies Teilchen kann in Polarkoordinaten nach der Variablentrennung wie folgt geschrieben werden:

$$r^2 R'' + 2rR' + \left(r^2 - l(l+1) \right) R = 0 \tag{6.227}$$

wobei l eine nicht-negative ganze Zahl ist. Wir benutzen den Ansatz

$$R(r) = \frac{Z(r)}{\sqrt{r}} \tag{6.228}$$

und dann wird die Gleichung für Z wie folgt geschrieben:

$$r^2 Z'' + rZ' + \left(r^2 - l\left(l + \frac{1}{2} \right)^2 \right) Z = 0 \tag{6.229}$$

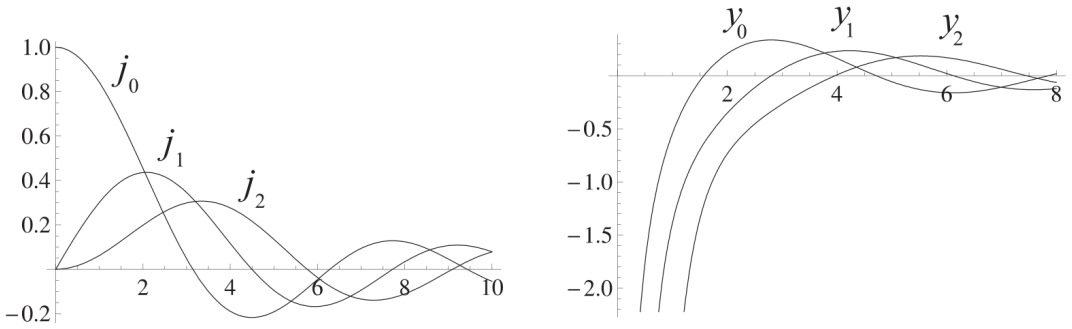


Abbildung 6.8: Sphärische Bessel-Funktionen.

Das ist nichts anderes als Bessel-Gleichung und Z ist die Bessel-Funktion halbzahliger Ordnung. Die Funktion $R(r)$ wird als sphärische Bessel-Funktion bezeichnet:

$$
\begin{aligned}
j_l(r) &= \sqrt{\frac{\pi}{2r}} J_{l+\frac{1}{2}}(r) && (6.230)\\
y_l(r) &= \sqrt{\frac{\pi}{2r}} Y_{l+\frac{1}{2}}(r) && (6.231)\\
&= (-1)^{l+1}\sqrt{\frac{\pi}{2r}} J_{-l-\frac{1}{2}}(r) && (6.232)\\
h_l^{(1)}(r) &= j_l(r) + i y_l(r) && (6.233)\\
h_l^{(2)}(r) &= j_l(r) - i y_l(r) && (6.234)
\end{aligned}
$$

Die Funktion $y_l(r)$ wird auch als $n_l(r)$ ausgedrürckt. Die expliziten Formen der Funktionen $j_l(r)$ und $y_l(r)$ niedriger Ordnungen sind

$$
\begin{aligned}
j_0(r) &= \frac{\sin r}{r} && (6.235)\\
j_1(r) &= \frac{\sin r - r\cos r}{r^2} && (6.236)\\
j_2(r) &= \frac{(3-r^2)\sin r - 3r\cos r}{r^3} && (6.237)\\
y_0(r) &= -\frac{\cos r}{r} && (6.238)\\
y_1(r) &= -\frac{\cos r + r\sin r}{r^2} && (6.239)\\
y_2(r) &= -\frac{(3-r^2)\cos r + 3r\sin r}{r^3} && (6.240)
\end{aligned}
$$

Die Fig. 6.8 zeigt die Graphik der sphärischen Bessel-Funktionen.

2.6 Fourier-Bessel-Entwicklung

Die Bessel-Funktionen bilden ein orthogonales System. Man kann eine beliebige (aber glatte) Funktion $f(x)$ auf dem Intervall $0 < x < c$ (wobei c eine Konstante ist) nach den Bessel-Funktionen entwickeln, wie die Entwicklung in eine Fourier-Reihe (auf dem Intervall von $-\pi$ bis π) oder in eine Legendre-Reihe (auf dem Intervall -1 bis 1). Die Entwicklung nach den Bessel-Funktionen

wird traditionell als Fourier-Bessel-Entwicklung bezeichnet, aber die trigonometrische Funktionen treten dabei nicht auf. Die Entwicklung bzw. die Zerlegung erfolgt:

$$f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} A_j J_\nu(\alpha_j x) \quad (\nu > -1) \tag{6.241}$$

und die Entwicklungskoeffizienten sind

$$A_j = \frac{2}{c^2 \left(J_{\nu+1}(\alpha_j c)\right)^2} \int_0^c x f(x) J_\nu(\alpha_j x) dx \quad (j = 1, 2, 3, \cdots) \tag{6.242}$$

wobei α_j die Nullstellen bzw. die Lösungen der Gleichung $J_\nu(\alpha_j c) = 0$ sind. α_j werden nach der Größe sortiert, $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots$.

Die Funktionen $\{\sqrt{x} J_\nu(\alpha_j x)\}_{j=1,2,\cdots}$ bilden ein System von Orthogonalfunktionen. Wir multiplizieren die beiden Seiten der Gl. (6.241) mit $x J_\nu(\alpha_j x)$ und integrieren über x,

$$\int_0^c x J_\nu(\alpha_k x) f(x) dx = \sum_{j=1}^{\infty} A_j \int_0^c x J_\nu(\alpha_k x) J_\nu(\alpha_j x) dx \tag{6.243}$$

Wenn die Orthogonalität zwischen $J_\nu(\alpha_k x)$ und $J_\nu(\alpha_j x)$ besteht,

$$\int_0^c x J_\nu(\alpha_k x) J_\nu(\alpha_j x) dx = \frac{c^2}{2} \left(J_{\nu+1}(\alpha_j c)\right)^2 \delta_{kj} \tag{6.244}$$

dann wird die Gl. (6.243)

$$\int_0^c x J_\nu(\alpha_k x) f(x) dx = \frac{c^2}{2} \left(J_{\nu+1}(\alpha_k c)\right)^2 A_k \tag{6.245}$$

Das ergibt die Gl. (6.242).

Wir prüfen die Orthogonalität in der Gl. (6.244). Die Bessel-Gleichung für die Funktionen $u = J_\nu(\alpha x)$ und $v = J_\nu(\beta x)$ mit beliebigen reellen Zahlen α und β werden wie folgt geschrieben:

$$u'' + \frac{1}{x} u' + \left(\alpha^2 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) = 0 \tag{6.246}$$

$$v'' + \frac{1}{x} v' + \left(\beta^2 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) = 0 \tag{6.247}$$

Wir multiplizieren die Gl. (6.246) mit xv, und die Gl. (6.247) mit xu. Dann ziehen wir die Gleichungen voneinander ab,

$$\frac{d}{dx}\left(x(vu' - uv')\right) + (\alpha^2 - \beta^2) xuv = 0 \tag{6.248}$$

Die Integration von 0 bis c ergibt sich

$$(\alpha^2 - \beta^2) \int_0^c x J_\nu(\alpha x) J_\nu(\beta x) dx = \left[x \left(J_\nu(\alpha x) \frac{dJ_\nu(\beta x)}{dx} - J_\nu(\beta x) \frac{dJ_\nu(\alpha x)}{dx}\right)\right]_0^c \tag{6.249}$$

$$= \left[x \left(\beta J_\nu(\alpha x) J'_\nu(\beta x) - \alpha J_\nu(\beta x) J'_\nu(\alpha x)\right)\right]_0^c \tag{6.250}$$

Bei $\alpha = \alpha_k$ und $\beta = \alpha_j$ $(k \neq j)$ ist die rechte Seite Null, da $J_\nu(\alpha_k c) = 0$ und $J_\nu(\alpha_j c) = 0$ bestehen. Somit

$$\int_0^c x J_\nu(\alpha_k x) J_\nu(\alpha_j x) dx = 0 \tag{6.251}$$

Die Bessel-Funktionen erfüllen also die Orthonalität.

Wir setzen $\beta \to \alpha$ in der Gl. (6.250) und bestimmen den Normierungsfaktor.

$$\int_0^c x J_\nu(\alpha x) J_\nu(\alpha x) = \lim_{\beta\to\alpha} \frac{c}{\alpha^2-\beta^2}\left(\beta J_\nu(\alpha c)J'_\nu(\beta c) - \alpha J_\nu(\beta c)J'_\nu(\alpha c)\right) \tag{6.252}$$

$$= -\frac{c}{2\alpha}\left\{J_\nu(\alpha c)J'_\nu(\alpha c) + \alpha c J_n u(\alpha c)J''_\nu(\alpha c) - \alpha c\left(J'_\nu(\alpha c)\right)^2\right\} \tag{6.253}$$

Wir schreiben die Bessel-Gleichung mit $x = \alpha c$,

$$J''_\nu(\alpha c) + \frac{1}{\alpha c}J'_\nu(\alpha c) + \left(1 - \frac{\nu^2}{\alpha^2 c^2}\right) J_\nu(\alpha c) = 0 \tag{6.254}$$

und schreiben die Ableitung zweiter Ordnung $J''_\nu(\alpha c)$ mit $J_\nu(\alpha c)$ und $J'_\nu(\alpha c)$ um. Die Gl. (6.253) ist dann

$$\begin{aligned} &\frac{c}{2\alpha}\left\{-J_\nu(\alpha c)J'_\nu(\alpha c) - \alpha c\left(J'_\nu(\alpha c)\right)^2 - \right. \\ &\left.\alpha c J_\nu(\alpha c)\left(\frac{1}{\alpha c}J'_\nu(\alpha c) + \left(1 - \frac{\nu^2}{\alpha^2 c^2}\right)J_\nu(\alpha c)\right)\right\} \\ = \;& \frac{c}{2\alpha}\left\{\alpha c\left(J'_\nu(\alpha c)\right)^2 + \alpha c\left(1 - \frac{\nu^2}{\alpha^2 c^2}\right)\left(J_\nu(\alpha c)\right)^2\right\} \end{aligned} \tag{6.255}$$

Die Ableitung erster Ordnung $J'_\nu(\alpha c)$ wird mit der Rekursionsformel (Gl. 6.166) kombiniert. Die rechte Seite der Gl. (6.255) ist dann

$$\frac{c^2}{2}\left(-J_{\nu+1}(\alpha c) + \frac{\nu}{\alpha c}J_\nu(\alpha c)\right)^2 + \frac{c^2}{2}\left(1 - \frac{\nu^2}{\alpha^2 c^2}\right)\left(J_\nu(\alpha c)\right)^2$$

Nun setzen wir $\alpha = \alpha_j$ (Nullstelle) ein. Da $J_\nu(\alpha_j c) = 0$ besteht, wird die Gl. (6.253) wie folgt geschrieben:

$$\int_0^c x\left(J_\nu(\alpha_j x)\right)^2 dx = \frac{c^2}{2}\left(J_{\nu+1}(\alpha_j c)\right)^2 \tag{6.256}$$

Somit erreichen wir die Gl. (6.244). Bei $\nu < -1$ konvergiert das Integral in der Gl. (6.256) nicht.

2.7 Laplace-Gleichung in Zylinderkoordinaten

Die Laplace-Gleichung wird in Zylinderkoordinaten wie folgt ausgedrückt:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \tag{6.257}$$

Mit dem Ansatz der Variablentrennung, $u = R(r)\Phi(\phi)Z(z)$, wird die Gl. (6.257)

$$\rho^2\left(\frac{R''}{R} + \frac{1}{\rho}\frac{R''}{R} + \frac{Z''}{Z}\right) = -\frac{\Phi''}{\Phi} \tag{6.258}$$

Wir evaluieren die Gl. (6.257) als Konstante m^2,

$$\Phi'' = -m^2\Phi \tag{6.259}$$

$$\frac{R''}{R} + \frac{1}{\rho}\frac{R'}{R} - \frac{m^2}{\rho^2} = -\frac{Z''}{Z} \tag{6.260}$$

Die Lösung der Gl. (6.259) wird als $e^{im\phi}$ ausdrückt, und m muss aufgrund der Periodizität mit 2π eine ganze Zahl sein. Wir evaluieren die Gl. (6.260) als Konstante $-a^2$,

$$Z'' = a^2 Z \tag{6.261}$$

$$\rho^2 R'' + \rho R' + (a^2\rho^2 - m^2)R = 0 \tag{6.262}$$

Z sind die Exponetialfunktionen oder die hyperbolischen Funktionen. R sind die Bessel-Funktionen. Die allgemeine Lösung der Laplace-Gleichung in Zylinderkoordinaten lautet

$$u = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (b_1(m,a)J_m(a\rho) + b_2(m,a)Y_m(a\rho))\, e^{im\phi} \left(c_1(a)e^{az} + c_2(a)e^{-az}\right) da \tag{6.263}$$

3 Hermite-Polynome

Die Hermite-Polynome $H_n(x)$ bilden ein orthogonales System auf dem Intervall von $-\infty$ bis ∞, und treten bei der Analyse der Schrödinger-Gleichung für den harmonischen Oszillator auf. Das Symbol H wird auch für die Hankel-Funktionen benutzt, und man sollte auf den Unterschied aufpassen.

3.1 Fundamentale Eigenschaften

Wir fangen mit der Definition der erzeugenden Funktion an. Die Hermite-Polynome ergeben sich als Koeffizienten der Taylor-Entwicklung der Funktion e^{z^2+2zx} nach z:

$$e^{-z^2+2zx} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x)\frac{z^n}{n!} \tag{6.264}$$

Die Hermite-Polynome besitzen die folgenden Eigenschaften:

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x) \tag{6.265}$$

$$H_n'(x) = 2nH_{n-1}(x) \tag{6.266}$$

$$H_{2n}(0) = (-1)^n \frac{(2n)!}{n!} \tag{6.267}$$

$$H_{2n+1}(0) = 0 \tag{6.268}$$

$$H_n(x) = (-1)^n H_n(-x) \tag{6.269}$$

Die Gl. (6.265) zeigt eine Rekursionsformel. Für den Beweis leiten wir die erzeugende Funktion (6.264) nach z ab,

$$(-2z + 2x)e^{-z^2+2zx} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x)\frac{nz^{n-1}}{n!} \tag{6.270}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} H_{n+1}(x)\frac{z^n}{n!} \tag{6.271}$$

Die linke Seite in der Gl. (6.270) kann wie folgt arrangiert werden:

$$-2z\sum_{n=0}^{\infty} H_n(x)\frac{z^n}{n!} + 2x\sum_{n=0}^{\infty} H_n(x)\frac{z^n}{n!} = -2\sum_{n=1}^{\infty} H_{n-1}(x)\frac{z^n}{(n-1)!} + 2\sum_{n=0}^{\infty} xH_n(x)\frac{z^n}{n!} \tag{6.272}$$

Wir vergleichen den Koeffizienten von z^n zwischen Gl. (6.271) und (6.272), und bekommen die Rekursionsformel (Gl. 6.265). Die Gl. (6.266) wird durch die Ableitung der Erzeugenden Funktion

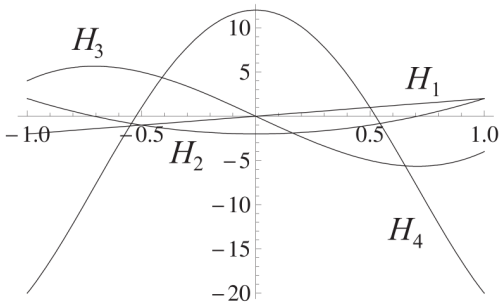


Abbildung 6.9: Hermite-Polynome $H_1(x)$, $H_2(x)$, $H_3(x)$ und $H_4(x)$.

(Gl. 6.264) hergeleitet. Die Werte am Ursprung (Gl. 6.267 und 6.268) werden durch Einsetzen von $x = 0$ in die Erzeugende Funktion (Gl. 6.264) und dann der Entwicklung in eine Potenzreihe hergeleitet. Die Gl. (6.269) wird durch den Vorzeichenwechsel von z und x in der Gl. (6.264) hergeleitet.

Die ersten Hermite-Polynome bei $n = 1, 2, 3$ und 4 sind

$$H_0(x) = 1 \tag{6.273}$$
$$H_1(x) = 2x \tag{6.274}$$
$$H_2(x) = 4x^2 - 2 \tag{6.275}$$
$$H_3(x) = 8x^3 - 12x \tag{6.276}$$
$$H_4(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12 \tag{6.277}$$
$$\tag{6.278}$$

Die Grafik der Hermite-Polynome wird in der Fig. 6.9 gezeigt. Das Hermite-Polynom $H_n(x)$ ist ein Polynom n-ter Ordnung wie man in der Rekursionsformel (Gl. 6.265) sehen kann. Die Rodrigues-Formel und die Potenzreihendarstellung werden wie folgt ausgedrückt:

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} \tag{6.279}$$
$$H_n(x) = \sum_{l=0}^{[n/2]} (-1)^l (2x)^{n-2l} \frac{n!}{l!(n-2l)!} \tag{6.280}$$

Für den Beweis der Rodrigues-Formel (Gl. 6.279) leiten wir die erzeugende Funktion (Gl. 6.264) n-fach nach z ab, und dann setzen wir $z = 0$ ein. Die rechte Seite der Gl. (6.264) ergibt $H_n(x)$. Die linke Seite kann wie folgt evaluiert werden:

$$\frac{\partial^n}{\partial z^n} e^{-z^2+2zx}\bigg|_{z=0} = \frac{\partial^n}{\partial z^n} e^{x^2} e^{-(z-x)^2}\bigg|_{z=0} \tag{6.281}$$
$$= e^{x^2} \frac{\partial^n}{\partial z^n} e^{-(z-x)^2}\bigg|_{z=0} \tag{6.282}$$
$$= e^{x^2} \frac{\partial^n}{\partial (-x)^n} e^{-(z-x)^2}\bigg|_{z=0} \tag{6.283}$$
$$= (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} \tag{6.284}$$

Für den Beweis der Gl. (6.280) untersuchen wir den Koeffizienten von z^n nach der Entwicklung

der linken Seite der Gl. (6.264),

$$e^{-z^2+2zx} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(-z^2+2zx)^k \tag{6.285}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{l=0}^{k} \frac{k!}{l!(k-l)!}(-z^2)^l (2zx)^{k-l} \tag{6.286}$$

Nun setzen wir $k+l = n$ und transformieren die Summenoperationen über k und l auf die Summen über n und l. Da $l \leq k$ und $k = n - l$ sind, läuft die Summe über l von 0 bis $[n/2]$. Somit

$$e^{-z^2+2zx} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^l (2x)^{n-2l}}{l!(n-2l)!} z^n \tag{6.287}$$

3.2 Differentialgleichung und Orthogonalität

Aus der Rekursiosformel (Gl. 6.266) folgt

$$H_n''(x) = 2nH_{n-1}'(x) \tag{6.288}$$

$$= 2n(2n-2)H_{n-2}(x) \tag{6.289}$$

Wir setzen $n \to n-1$ in die Rekursionsformel (Gl. 6.265) ein, und kombinieren mit der Gl. (6.289),

$$H_n(x) = 2xH_{n-1}(x) - 2(n-1)H_{n-2}(x) \tag{6.290}$$

$$= 2x\frac{H_n'(x)}{2n} - \frac{H_n''(x)}{2n} \tag{6.291}$$

Daher ist die Funktion $y = H_n(x)$ die Lösung der Hermite-Gleichung:

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0 \tag{6.292}$$

Wir definieren den gewichteten Hermite-Polynom $\phi_n(x)$ durch

$$\phi_n(x) = e^{-x^2/2} H_n(x) \tag{6.293}$$

Die Funktion $\phi_n(x)$ ist die Lösung der folgenden Gleichung:

$$\phi_n''(x) + (2n+1-x^2)\phi_n(x) = 0 \tag{6.294}$$

Die Gl. (6.294) ist im wesentlichen gleich der Schrödinger-Gleichung für den harmonischen Oszillator in der Quantenmechanik.

Die Hermite-Polynome erfüllen die Orthogonalrelation und die Normierbarkeit.

$$(H_n, H_m) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n(x) H_m(x) dx \tag{6.295}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \phi_n(x)\phi_m(x) dx \tag{6.296}$$

$$= 2^n n! \sqrt{\pi} \delta_{nm} \tag{6.297}$$

Für den Beweis multiplizieren wir die Gl. (6.294) mit $\phi_m(x)$, tauschen die Indizen zwischen n und m, und ziehen die zwei Gleichungen voneinander ab,

$$\phi_m(x)\phi_n''(x) - \phi_n(x)\phi_m''(x) + (2n-2m)\phi_n(x)\phi_m(x) = 0 \tag{6.298}$$

Wir integrieren $\phi_n\phi_m$ über x von $-\infty$ bis ∞,

$$2(n-m)\int_{-\infty}^{\infty}\phi_n(x)\phi_m(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{d}{dx}\left(\phi_m(x)\phi_n'(x)-\phi_n(x)\phi_m'(x)\right)\,dx \tag{6.299}$$

$$= \left[\phi_m(x)\phi_n'(x)-\phi_n(x)\phi_m'(x)\right]_{-\infty}^{\infty} \tag{6.300}$$

$$= 0 \tag{6.301}$$

Deshalb besteht die Orthogonalität $(H_n, H_m) = 0$ bei $n \neq m$.

Wir prüfen die Normierung. Wir quadrieren die erzeugende Funktion (Gl. 6.264), multiplizieren mit dem Gewicht e^{-x^2} und integrieren über x. Aus der Orthogonalität $(H_n, H_m) = 0$ $(n \neq m)$ folgt

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-2z^2+4zx}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(H_n,H_n)}{(n!)^2}z^{2n} \tag{6.302}$$

Die linke Seite ist die Integration einer Gauss-Funktion und kann analytisch evaluiert werden,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-2x^2+4zx}\,dx = \sqrt{\pi}e^{2z^2} \tag{6.303}$$

$$= \sqrt{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!}z^{2n} \tag{6.304}$$

Der Vergleich des Koeffizienten von z^{2n} zwischen der Gl. (6.302) und (6.304) ergibt den Normierungsfaktor.

3.3 Diskussion

Die Lösung der Hermite-Gleichung bei einer reellen Zahl ν ist wesentlich verschieden von der Lösung bei einer ganzen Zahl n. Die Hermite-Gleichung ist bei ν

$$y'' - 2xy' + 2\nu y = 0 \tag{6.305}$$

Die Lösung verhält sich wie e^{x^2} in der Grenzbetrachtung $x \to \infty$, und sie ist nicht mehr normierbar. Mit anderen Worten muss ν für die Normierbarkeit eine nicht-negative ganze Zahl sein. Dieses Verhalten der Lösung entspricht den diskreten Energieniveaus des harmonischen Oszillators in der Quantenmechanik.

Wir prüfen das Verhalten der Lösung der Hermite-Gleichung bei einem großen Wert von x. Wir drücken die Lösung y mit der Potenzreihe aus,

$$y = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^{c+j} \tag{6.306}$$

wobei $a_0 \neq 0$ ist. Wir setzen die Gl. (6.306) in Gl. (6.305) ein,

$$\sum_{j=-2}^{\infty} a_{j+2}(c+j+2)(c+j+1)x^{c+j} + 2\sum_{j=0}^{\infty}(\nu-c-j)a_j x^{c+j} = 0 \tag{6.307}$$

Die Bedingungen für a_0 und a_1 sind also

$$c(c-1)a_0 = 0 \tag{6.308}$$

$$c(c+1)a_1 = 0 \tag{6.309}$$

Da $a_0 \neq 0$ ist, muss aus der charakteristischen Gleichung ($c(c-1)=0$) entweder $c=0$ oder $c=1$ folgen. Bei $c=1$ folgt $a_1=0$. Wenn $c=0$, bleibt a_1 unbestimmt, aber wir wählen $a_1=0$.

Bei $c=0$ müssen die Koeffizienten von allen Termen verschwinden, also

$$a_{j+2} = \frac{2(j-\nu)}{(j+1)(j+2)} a_j \tag{6.310}$$

Die expliziten Formen der Koeffizienten sind

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{2\cdot(0-\nu)}{1\cdot 2} a_0 && (6.311)\\ a_4 &= \frac{2\cdot(2-\nu)}{3\cdot 4} a_2 && (6.312)\\ &\vdots \\ a_{2k} &= \frac{2(2k-2-\nu)}{(2k-1)(2k)} a_{2k-2} && (6.313) \end{aligned}$$

Daraus folgt die Relation zwischen a_{2k} und a_0,

$$a_{2k} = \frac{2^k(0-\nu)(2-\nu)\cdots(2k-2-\nu)}{(2k)!} a_0 \tag{6.314}$$

Es ist jetzt klar, dass ν eine nicht-negative gerade Zahl sein muss. Das Verhalten der Hermite-Polynome $y(x)$ bei großen x wird durch den Koeffizienten a_{2k} (wenn k größer als $|\nu|$) bestimmt. Deshalb lassen wir ν in der Gl. (6.314) weg und benutzen die Stirling-Formel für die Evaluation der großen Fakultät,

$$\begin{aligned} \frac{2_{2k}}{a_0} &\simeq \frac{2^k(2k)!!}{(2k)!} && (6.315)\\ &= \frac{2^k 2^k k!}{(2k)!} && (6.316)\\ &\simeq \frac{2^{2k} k^k e^{-k}}{(2k)^{2k} e^{-2k}} && (6.317)\\ &= \frac{1}{k^k e^{-k}} && (6.318)\\ &\simeq \frac{1}{k!} && (6.319) \end{aligned}$$

Die Reihe (Gl. 6.306) wird aus der Grenzbetrachtung mit einem großen Wert von x wie folgt geschrieben:

$$\begin{aligned} y &\simeq \sum_{j\gg\nu} \frac{x^{2j}}{j!} + \cdots && (6.320)\\ &\simeq e^{x^2} + \cdots && (6.321) \end{aligned}$$

Deshalb verhält sich die Lösung wie e^{x^2}, wenn der Index ν keine ganze Zahl, sondern eine reelle Zahl ist. Diese Diskussion gilt auch bei $c=1$.

4 Laguerre-Polynome

Die Laguerre-Polynome $L_n(x)$ sowie die zugeordneten Laguerre-Polynome $L_n^k(x)$ treten bei der Lösung der Schrödinger-Gleichung für das Wasserstoffatom auf. Die Laguerre-Polynome bilden ein orthogonales System auf dem Intervall von 0 bis ∞.

4.1 Fundamentale Eigenschaften

Die erzeugende Funktion und die Rekursionsformeln der Laguerre-Polynome werden wie folgt gegeben:

$$\frac{e^{-xz/(1-z)}}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x)\frac{z^n}{n!} \tag{6.322}$$

$$L_n(x) = e^x \frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x}) \tag{6.323}$$

$$L_n(x) = \sum_{l=0}^{n} \frac{(-1)^l (n!)^2}{(l!)^2 (n-l)!} x^l \tag{6.324}$$

$$L_{n+1}(x) = (2n+1-x)L_n(x) - n^2 L_{n-1}(x) \tag{6.325}$$

$$xL_n'(x) = nL_n(x) - n^2 L_{n-1}(x) \tag{6.326}$$

$$L_n(0) = n! \tag{6.327}$$

Die Gl. (6.322) zeigt die erzeugende Funktion. Die Gl. (6.323) ist die Rodrigues-Formel. Sie lässt sich durch die Cauchy-Integralformel herleiten,

$$L_n(x) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{e^{-xz/(1-z)}}{(1-z)z^{n+1}} dz \tag{6.328}$$

Die Integrationskontur ist dabei ein Kreis um den Ursprung $z = 0$ und der Radius ist kleiner als eins. Wir führen die folgende Variablentransformation durch:

$$\frac{xz}{1-z} = s - x \tag{6.329}$$

oder

$$z = \frac{s-x}{x} \tag{6.330}$$

Die Laguerre-Polynome werden dann als Integral über s dargestellt,

$$L_n(x) = \frac{n! e^x}{2\pi i} \oint_{C'} \frac{s^n e^{-s}}{(s-x)^{n+1}} ds \tag{6.331}$$

Die Kontur C' ist ein Kreis um x. Wir wenden die Cauchy-Integralformel auf die rechte Seite der Gl. (6.331) an, und bekommen die Rodrigues-Formel (Gl. 6.323).

Die Polynomdarstellung (Gl. 6.324) wird aus der Ableitung der Rodgrigues-Formel (Gl. 6.323) hergeleitet. Mit Hilfe der Leibniz-Formel (Gl. 6.87) folgt

$$e^x \frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x}) = \sum_{k=0}^{n} e^x \frac{n!}{k!(n-k)!} n(n-1)\cdots(n-k+1)x^{n-k}(-1)^{n-k} e-x \tag{6.332}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k} n!}{k!(n-k)!} \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} \tag{6.333}$$

$$= \sum_{l=0}^{n} \frac{(-1)^l (n!)^2}{(n-l)!(l!)^2} x^l \tag{6.334}$$

Die Rekursionsformel (Gl. 6.325) wird aus der erzeugenden Funktion hergeleitet. Wir schreiben die erzeugende Funktion wie $g(x, z)$, und nehmen den Logarithmus,

$$\log g = -\frac{xz}{1-z} - \log(1-z) \tag{6.335}$$

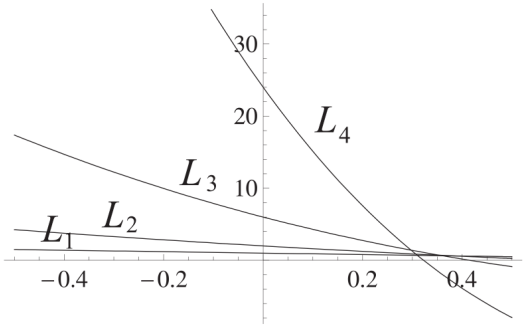


Abbildung 6.10: Laguerre-Polynome $L_1(x)$, $L_2(x)$, $L_3(x)$ und $L_4(x)$.

Wir leiten nach z ab,

$$(1-z)^2\frac{\partial g}{\partial z} = (1-x-z)g \tag{6.336}$$

Wir drücken die erzeugende Funktion g mit der rechten Seite der Gl. (6.322) aus, und vergleichen die Koeffizienten von z, z^2, $\cdots$. Somit bekommen wir die Rekursionsformel (Gl. 6.325).

Für den Beweis der anderen Rekursionsformel (Gl. 6.326) benutzen wir die folgende Relation für g:

$$x\frac{\partial g}{\partial x} - z\frac{\partial g}{\partial z} = -z\frac{\partial}{\partial z}(zg) \tag{6.337}$$

oder

$$x\frac{1}{g}\frac{\partial g}{\partial x} - (z-z^2)\frac{1}{g}\frac{\partial g}{\partial z} = -z \tag{6.338}$$

Die Gl. (6.327) wird aus der erzeugenden Funktion (Gl. 6.322) hergeleitet. Die ersten Laguerre-Polynome sind

$$\begin{aligned}
L_0(x) &= 1 && (6.339)\\
L_1(x) &= -x+1 && (6.340)\\
L_2(x) &= x^2-4x+2 && (6.341)\\
L_3(x) &= -x^3+9x^2-18x+6 && (6.342)\\
L_4(x) &= x^4-16x^3+72x^2-96x+24 && (6.343)\\
& && (6.344)
\end{aligned}$$

und die Grafik wird in der Fig. 6.10 gezeigt.

4.2 Differentialgleichung und Orthogonalität

Die Laguerre-Polynome sind die Lösung der folgenden Gleichung (Laguerre-Gleichung):

$$xy'' + (1-x)y' + ny = 0 \tag{6.345}$$

Man kann die Lösungen mit der Integraldarstellung (Gl. 6.329) prüfen. Die Ableitungen y' und y'' sind

$$\begin{aligned}
y' &= -\frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{e^{-xz/(1-z)}}{(1-z)^2 z^n}dz && (6.346)\\
y'' &= \frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{e^{-xz/(1-z)}}{(1-z)^3 z^{n-1}}dz && (6.347)
\end{aligned}$$

Wir setzen die Gl. (6.346) und (6.347) in die Gl. (6.345) ein und multiplizieren mit $2\pi i/n!$,

$$\oint \left\{ \frac{x}{(1-z)^3 z^{n-1}} - \frac{1-x}{(1-z)^2 z^n} + \frac{n}{(1-z)z^{n+1}} \right\} x^{-xz/(1-z)} dz = -\oint \frac{d}{dz} \left\{ \frac{e^{-xz/(1-z)}}{(1-z)z^n} \right\} dz \tag{6.348}$$

Entlang der Integrationskontur gibt es keine Bifurkation, und die Kontur ist eine geschlossene Linie. Das Integral ergibt also Null, und damit sind die Laguerre-Polynome die Lösungen der Gl. (6.345).

Die Orthonalität wird mit der Gewichtung hergeleitet,

$$\psi_n(x) = e^{-x/2} L_n(x) \tag{6.349}$$

Die Laguerre-Gleichung (Gl. 6.345) ist dann

$$x\psi_n''(x) + \psi_n'(x) + \left(n + \frac{1}{2} - \frac{x}{4} \right) \psi_n = 0 \tag{6.350}$$

Die Orthogonalitätsrelation ist

$$\begin{aligned} (L_n, L_m) &= \int_0^\infty e^{-x} L_n(x) L_m(x) dx && (6.351) \\ &= \int_0^\infty \psi_n(x) \psi_m(x) dx && (6.352) \\ &= (n!)^2 \delta_{nm} && (6.353) \end{aligned}$$

Der Beweis folgt den Schritten für die Hermite-Polynome. Der Normierungsfaktor wird durch die Integration des Quadrats der Erzeugenden Funktion (Gl. 6.322) mit dem Gewicht e^{-x} hergeleitet.

4.3 Zugeordnete Laguerre-Polynome

Die zugeordneten Laguerre-Polynome werden wie folgt definiert:

$$L_n^k(x) = (-1)^k \frac{d^k}{dx^k} L_{n+k}(x) \tag{6.354}$$

und besitzen die folgenden Eigenschaften:

$$\begin{aligned} L_n^k(x) &= \sum_{m=0}^{n} (-1)^m \frac{((n+k)!)^2}{(n-m)!(m+k)!m!} x^m && (6.355) \\ \frac{e^{-xz/(1-z)}}{(1-z)^{k+1}} &= \sum_{n=0}^{\infty} L_n^k(x) \frac{z^n}{(n+k)!} && (6.356) \\ L_n^k(x) &= e^x x^{-k} \frac{(n+k)!}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} x^{n+k}) && (6.357) \\ \frac{n+1}{n+1+k} L_{n+1}^k(x) &= (2n+k+1-x) L_n^k(x) - (n+k)^2 L_{n-1}^k(x) && (6.358) \\ x \frac{d}{dx} L_n^k(x) &= n L_n^k(x) - (n+k)^2 L_{n-1}^k(x) && (6.359) \end{aligned}$$

Die Polynomendarstellung (Gl. 6.355) wird durch die Ableitung der Definition (Gl. 6.354) hergeleitet. Die erzeugende Funktion (Gl. 6.356) wird aus der erzeugenden Funktion der Laguerre-Polynome (Gl. 6.322) hergeleitet. Wir schreiben die Gl. (6.322) in die Form

$$\frac{e^{-xz/(1-z)}}{1-z} = \sum_{n=-k}^{\infty} L_{n+k}(x) \frac{z^{n+k}}{(n+k)!} \tag{6.360}$$

und leiten dann k-fach nach x ab.

Die Rodrigues-Formel (Gl. 6.357) wird wie folgt hergeleitet: die rechte Seite mit Hilfe der Leibniz-Regel nach Polynom entwickeln und dann vergleichen mit der Gl. (6.355). Die Rekursionsformel (Gl. 6.358) wird wie folgt hergeleitet: den Logarithmus der erzeugenden Funktion nehmen,

$$\log g = -\frac{xz}{1-z} - (k+1)\log(1-z) \tag{6.361}$$

und dann nach z ableiten,

$$(1-z)^2 \frac{\partial g}{\partial z} = (k+1-x-(k+1)z)\, g \tag{6.362}$$

Wir setzen die erzeugenden Funktion (Gl. 6.356) in g ein, und vergleichen die Koeffizienten von z^n.

Die andere Rekursionsformel (Gl. 6.359) wird wie folgt hergeleitet: den Logarithmus der erzeugenden Funktion nehmen; nach x ableiten,

$$\frac{1}{g}\frac{\partial g}{\partial x} = -\frac{z}{1-z} \tag{6.363}$$

und dann mit der Gl. (6.362) kombinieren,

$$x\frac{\partial g}{\partial x} - z\frac{\partial g}{\partial z} = -z\frac{\partial}{\partial z}(zg) - kzg \tag{6.364}$$

Wir setzen die Darstellung mit der erzeugenden Funktion (Gl. 6.356) ein, und vergleichen die Koeffizienten von z^n.

Die zugeordneten Laguerre-Polynome sind die Lösung der Laguerre-Gleichung (Gl. 6.365) und haben die Orthogonalrelation sowie den folgenden Normierungsfaktor:

$$xy'' + (k+1-x)y' + ny = 0 \tag{6.365}$$

$$\int_0^\infty e^{-x} x^k L_m^k(x) L_n^k(x) dx = \frac{((n+k)!)^3}{n!}\delta_{mn} \tag{6.366}$$

$$\int_0^\infty e^{-x} x^{k+1} \left(L_n^k(x)\right)^2 dx = \frac{((n+k)!)^3}{n!}(2n+k+1) \tag{6.367}$$

Die Gl. (6.365) wird wie folgt hergeleitet: Wir setzen $n \to n+k$ in der Gl. (6.345) und leiten k-fach nach x ab.

Die Orthogonalrelation (6.366) bei $n \neq m$ wird wie folgt hergeleitet. Wir führen eine gewichteten Funktion $\psi_n^k(x)$ ein,

$$\psi_n^k(x) = e^{-x/2} x^{k/2} L_n^k(x) \tag{6.368}$$

Das ist die Lösung der folgenden Gleichung:

$$x(\psi_n^k)'' + (\psi_n^k)' + \left(-\frac{x}{4} + \frac{2n+k+1}{2} - \frac{k^2}{4x}\right)\psi_n^k = 0 \tag{6.369}$$

Wir multiplizieren diese Gleichung mit ψ_m^k, tauschen die Indizes n und m, ziehen voneinander ab. Bei $n = m$ quadrieren wir die erzeugende Funktion (Gl. 6.356), multiplizieren mit dem Gewicht $x^k e^{-x}$ und integrieren von 0 bis ∞. Die Gl (6.367) wird wie folgt hergeleitet. Wir benutzen die Rekursionsformel (Gl. 6.358) und schreiben den Ausdruck xL_n^k im Integrand um. Dann kombinieren wir mit der Orthogonalität $(L_n^k, L_m^k) = 0$ bei $n \neq m$.

Die Gl. (6.367) sowie die zugeordnete Laguerre-Gleichung treten bei der Analyse der radialen Komponente der Schrödinger-Gleichung für das Wasserstoffatom auf. Wenn n keine ganze Zahl, sondern eine reelle Zahl ν ist, sieht die Gleichung wie folgt aus:

$$xy'' + (k + 1 - x)y' + \nu y = 0 \tag{6.370}$$

Die Lösung verhält sich wie e^x aus der Grenzbetrachtung $x \to \infty$, und ist nicht mehr normierbar. Wie beim Problem des harmonischen Oszillators erfordert die Normierbarkeit die Quantisierung der Wellenfunktion in der Quantenmechanik. Das Verhalten wie e^x kann durch die Evaluation der einzelnen Terme bei der Reihenentwicklung überprüft werden. Wenn n eine ganze Zahl ist, hört die Reihenentwicklung mit einer endlichen Ordnung auf und die Reihe wird ein Polynom.

Kapitel 7

Differentialgleichungen

1 Begriff und Klassifikation

- Wir betrachten eine skalare Funktion $f(x, y, z, t),\ f|\mathbb{R}^4 \to \mathbb{C}^1$

  Definition einer Differentialgleichung (Dgl.):

  > Eine Relation, die f und Ableitungen von f zueinander in Beziehung setzt, heißt Dgl.:

  $$\psi\left(f, \partial_x f, \partial_y f, \partial_z f, \partial_t f, \partial_x^2 f, \partial_x \partial_y f, \ldots\right) = 0 \tag{7.1}$$

  Ein Bespiel ist die Wellengleichung:

  $$\partial_x^2 f + \partial_y^2 f + \partial_z^2 f - \frac{1}{c^2}\partial_t^2 f = 0 \tag{7.2}$$

- Man unterscheidet gewöhnliche und partielle Dgln. Treten partielle Ableitungen auf, wie in der Wellengleichung (7.2), spricht man von partiellen Dgln.

  Hängt f nur von einer Variablen ab, z.B. $f(x)$, treten deshalb nur Ableitungen $\mathrm{d}_x f$, $\mathrm{d}_x^2 f, \ldots$ auf und man spricht von einer gewöhnlichen Dgl.

- Zusätzlich unterscheidet man lineare und nichtlineare Dgln.

  Ist ψ eine lineare Funktion, so heißt die Relation lineare Dgl.

  Beispiele für lineare Dgln sind die Wellengleichung (7.2) oder

  $$f'' + \alpha f' + \beta f = g(x)$$

  wobei $f' \equiv \mathrm{d}_x f,\ f'' \equiv \mathrm{d}x^2 f$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{C};\ g(x)$ komplexe gegebene Funktion.

  Ist ψ eine nichtlineare Funktion, so heißt die Relation nichtlineare Dgl.

  Beispiele für nichtlineare Dgln:

  $$f' = a(x) + b(x)f + c(x)f^2 \qquad \text{(Riccati Dgl.)} \tag{7.3}$$

  $$\partial_x \partial_y f = \sin f \qquad \text{(Sinus-Gordon-Gleichung)} \tag{7.4}$$

- Ordnung der Dgl.

  Der Grad der höchsten Ableitung heißt Ordnung der Dgl.

  Die Riccati Dgl (7.3) ist eine Dgl 1. Ordnung, die Sinus-Gordon-Gleichung (7.4) ist Dgl 2. Ordnung und die Wellengleichung (7.2) ist ebenfalls eine Dgl. 2. Ordnung.

- Explizite und implizite Dgln.

  Wenn sich die Gleichung nach der jeweils höchsten Ableitung auflösen läßt, heißt die Dgl. explizit, sonst implizit.

Ein Beispiel für eine explizite Dgl. ist die Ricatti Dgl. (7.3).

Ein Beispiel für eine implizite Dgl. ist:

$$f' + a(x) \ln f' = b(x) f$$

- Systeme von Dgln.

  Wenn statt f ein n-Tupel („Vektor“) $\underline{f}$ vorliegt und diese n Funktionen aus n verkoppelten Gleichungen $\underline{\psi} = 0$ zu bestimmen sind, so liegt ein Dgl.-System vor.

  Beispiel: $\underline{f} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} u' + \alpha u + \beta v &= g(x) \\ v' + \gamma u + \delta v &= h(x) \end{aligned}$$

  Dies ist ein System zweier gewöhnlicher linearer Dgln.

- Bemerkungen zur Lösbarkeit von Dgln.

  Es gibt keine allgemeine Lösungs-theorie.

  Für einige Klassen von Dgln. gibt es Existenz- und Eindeutigkeitssätze.

  Für wenige Klassen von Dgln. gibt es Strategien zur Auffindung einer analytischen Lösung.

  Für wichtige Dgln. der Physik sind analytische Lösungen bekannt.

  Viele Dgln., die sich nicht analytisch lösen lassen, kann man numerisch lösen. (Mehr dazu in der Vorlesung „Computational Physics“).

- Bedeutung von Dgln.

  Viele wesentliche physikalische Theorien werden in Form von Dgln. formuliert.

  In der Klassischen Mechanik (Newton-Theorie):

$$m\ddot{\underline{r}} = \underline{\mathcal{K}}(\underline{r}, \dot{\underline{r}}, t). \tag{7.5}$$

  Die Newton-Bewegungsgleichung (7.5) ist ein System von gewöhnlichen nichtlinearen Dgln. 2. Ordnung für $\underline{r}(t)$.

  In der Klassischen Elektrodynamik (Maxwell-Theorie):

$$\begin{aligned} \partial_{\underline{r}} \times \underline{H} &= \partial_t \underline{D} + \underline{j} && (7.6) \\ \partial_{\underline{r}} \times \underline{E} &= -\partial_t \underline{B} && (7.7) \\ \partial_{\underline{r}}\, \underline{B} &= 0 && (7.8) \\ \partial_{\underline{r}}\, \underline{D} &= \rho && (7.9) \end{aligned}$$

  Die Maxwell-Glgn (7.6)-(7.9) sind ein System von partiellen linearen Dgln. 1. Ordnung für $\underline{E}(\underline{r}, t)$, $\underline{B}(\underline{r}, t)$, $\underline{D}(\underline{r}, t)$, $\underline{H}(\underline{r}, t)$.

  In der Allgemeinen Relativitätstheorie (Einstein-Theorie):

$$R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R = \kappa T_{ij} \tag{7.10}$$

  Dies ist ein System von partiellen nichtlinearen Dgln. 2. Ordnung für den metrischen Tensor $g_{ij},\ i, j, \ldots = 1, \ldots, 4$. Dabei sind R_{ij} und R gewisse Verjüngungen des Krümmungstensors R_{ijkl}, und T_{ij} ist der Energie-Implus Tensor.

  In der Quantentheorie (Schrödinger Gleichung):

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + \hat{V} \right) \psi = i\hbar \partial_t \psi \tag{7.11}$$

  Die Schrödinger Gleichung (7.11) ist eine lineare partielle Dgl. für die ψ-Funktion $\psi(\underline{r}, t)$.

2 Gewöhnliche Differentialgleichungen

2.1 Differentialgleichungen 1. Ordnung

- Gegeben sei die Dgl. $y' = f(x, y)$.
- Gesucht ist $y(x)$

2.1.1 Lineare Differentialgleichungen

- Die allgemeine Form einer linearen gewöhnlichen Dgl. 1. Ordnung ist gegeben durch:

$$y' + ay = b \qquad \{f(x, y) = b(x) - a(x)y\} \tag{7.12}$$

(7.12) ist ein linearer Ausdruck in y' und y. Der Koeffizient $a(x)$ ist im allgemeinen nicht konstant. $b(x)$ ist die sogenannte Inhomogenität der Dgl.

- Die gesuchte allgemeine Lösung $y(x)$ setzt sich zusammen aus:

  1. der allgemeinen Lösung $y_h(x)$ der homogenen Dgl.

$$y' + ay = 0 \tag{7.13}$$

  2. und einer speziellen Lösung $y_i(x)$ der inhomogenen Dgl.

$$y' + ay = b,$$

also insgesamt:

$$y(x) = y_h(x) + y_i(x) \tag{7.14}$$

- y_h bestimmt sich nach folgendem Algorithmus:

$$\begin{aligned} y' + ay &= 0 \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= -a(x)y \\ \frac{\mathrm{d}y}{y} &= -a(x)\,\mathrm{d}x \\ \int_c^y \frac{\mathrm{d}\tilde{y}}{\tilde{y}} &= -\int_{x_0}^x a(\tilde{x})\,\mathrm{d}\tilde{x} \\ \ln y - \ln c &= -\int_{x_0}^x a(\tilde{x})\,\mathrm{d}\tilde{x} \\ y &= c\,e^{-\int_{x_0}^x a(\tilde{x})\,\mathrm{d}\tilde{x}} \end{aligned} \tag{7.15}$$

Hier tritt offensichtlich eine Integrationskonstante c auf.

- Die spezielle Lösung y_i wird wie folgt bestimmt:

$$y' + ay = b \tag{7.16}$$

Entweder: Falls $a(x)$ und $b(x)$ konkret gegeben sind, kann y_i gegebenenfalls erraten werden. z.B.

$$y' + \frac{2}{x} y = \frac{1}{x^2}$$
$$\curvearrowright y_i = \frac{1}{x}\,, \quad \text{denn } y_i' = -\frac{1}{x^2}$$

Oder: Man benutzt das Verfahren „Variation der Konstanten“.

Dazu geht man von der homogenen Lösung

$$y_h = c\, e^{-\int_{x_0}^{x} a(\tilde{x})\,\mathrm{d}\tilde{x}}$$

aus und macht den Ansatz

$$y_i = c(x)\, e^{-\int_{x_0}^{x} a(\tilde{x})\,\mathrm{d}\tilde{x}} \tag{7.17}$$

$$\begin{aligned} \curvearrowright \quad y_i' &= c'\, e^{-\int_{x_0}^{x} a\,\mathrm{d}\tilde{x}} - ac\, e^{-\int_{x_0}^{x} a\,\mathrm{d}\tilde{x}} = c'\, e^{-\int_{x_0}^{x} a\,\mathrm{d}\tilde{x}} - a y_i \\ \curvearrowright \quad y_i' + a y_i &= c'\, e^{-\int_{x_0}^{x} a\,\mathrm{d}\tilde{x}} = b(x) \end{aligned}$$

$$c' = b(x)\, e^{\int_{x_0}^{x} a\,\mathrm{d}\tilde{x}} \tag{7.18}$$

$$c = \int_{x_0}^{x} b\left(\tilde{\tilde{x}}\right)\, e^{-\int_{x_0}^{\tilde{\tilde{x}}} a\,\mathrm{d}\tilde{x}}\,\mathrm{d}\tilde{\tilde{x}} \tag{7.19}$$

Da nur eine spezielle Lösung y_i benötigt wird, wählen wir die Integrationskonstanten genau so, wie angegeben:

$$\curvearrowright \quad y_i = \int_{x_0}^{x} b(\tilde{\tilde{x}})\, e^{-\int_{x_0}^{\tilde{\tilde{x}}} a(\tilde{x})\,\mathrm{d}\tilde{x}}\,\mathrm{d}\tilde{\tilde{x}} \cdot e^{-\int_{x_0}^{x} a(\tilde{x})\,\mathrm{d}\tilde{x}} \tag{7.20}$$

- Zusammenstellung der allg. Lösung y

$$y = \left\{ c + \int_{x_0}^{x} b(\xi) e^{\int_{x_0}^{\xi} a(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta}\,\mathrm{d}\xi \right\} e^{-\int_{x_0}^{x} a(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta} \tag{7.21}$$

mit der Umbenennung der Integrationsvariablen $\tilde{\tilde{x}} = \xi,\ \tilde{x} = \zeta$.

y ist offensichtlich nicht eindeutig bestimmt, da c eine beliebige Integrationskonstante ist.

Wir fordern eine „Anfangsbedingung“

$$y(x_0) = y_0, \tag{7.22}$$

um eine eindeutige Lösung zu erhalten. In der Physik liegen Anfangsbedingungen in der Regel sowieso vor.

$$\curvearrowright \quad y(x_0) = c \tag{7.23}$$

$$\curvearrowright \quad y = \left\{ y_0 + \int_{x_0}^{x} b(\xi) e^{\int_{x_0}^{\xi} a(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta} \right\} e^{-\int_{x_0}^{x} a(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta} \tag{7.24}$$

ist nun die eindeutige Lösung der Dgl. (7.12) mit der Anfangsbedingung (7.23).

Zum Beweis der Eindeutigkeit wird hier auf Vorlesungen der Mathematik verwiesen.

2.1.2 Nichtlineare Differentialgleichungen

- Die allgemeine Form ist:

$$y' = f(x, y) \tag{7.25}$$

Es existiert keine allgemeine Lösungsmethode. Es gibt aber unzählige Spezialfälle, die einfach lösbar sind. Siehe dazu auch [Kam62].

- Wir behandeln zunächst eine eingeschränkte Situation und nehmen an, daß f separierbar ist. Dann folgt:

$$f(x, y) = g(x) \cdot h(y) \tag{7.26}$$

$$y' = g(x) \cdot h(y) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{h(y)} = g(x) \cdot \mathrm{d}x$$

$$\int_c^y \frac{\mathrm{d}\tilde{y}}{h(\tilde{y})} = \int_{x_0}^x g(\tilde{x})\,\mathrm{d}\tilde{x}$$

Die Integration liefert im Prinzip die allgemeine Lösung $y = y(x, c)$.

Die Integrationskonstante c wird wieder durch eine Anfangsbedingung $y(x_0) = y_o$ festgelegt.

- Beispiel:

$$y' = -\frac{x}{y}$$

Die Gleichung ist nichtlinear, aber separierbar.

$$y\,\mathrm{d}y = -x\,\mathrm{d}x$$

$$\begin{aligned} \int_c^y \tilde{y}\,\mathrm{d}\tilde{y} &= -\int_{x_0}^x \tilde{x}\,\mathrm{d}\tilde{x} \\ \frac{y^2}{2} - \frac{c^2}{2} &= -\frac{x^2}{2} + \frac{x_0^2}{2} \\ y^2 + x^2 &= c^2 + x_0^2 \end{aligned}$$

Wir benennen die Integrationskonstante um:

$$c^2 + x_0^2 = r_0^2$$

$$y^2 + x^2 = r_0^2$$

Die Lösung der Dgl ist also ein Kreis mit dem Radius r_0.

r_0 wird jetzt durch die Anfangsbedingung festgelegt:

$$y(x_0) = y_0 \quad \curvearrowright \quad y_0^2 + x_0^2 = r_0^2$$

Die Lösung lautet dann:

$$y_0^2 + x_0^2 = y^2 + x^2$$

- Lösen von Dgln. durch Substitutionen

  Durch geeignete Subtitutionen kann versucht werden, aus nichtlinearen Dgln. lineare oder separable Dgln. zu erzeugen, die dann einfach zu lösen sind.

  Ein Beispiel ist die Bernoulli-Gleichung

$$y' + a(x)y = b(x)y^\alpha \ , \quad \alpha \in \mathbb{R} \ \alpha \neq 0, 1 \tag{7.27}$$

  Substitution:

$$z = \frac{y}{y^\alpha} = y^{1-\alpha} \qquad \curvearrowright \qquad y = z \cdot y^\alpha$$

$$z' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y' \qquad \curvearrowright \qquad y' = \frac{1}{1-\alpha} z' y^\alpha$$

$$\frac{1}{1-\alpha} z' y^\alpha + azy^\alpha = by^\alpha$$

$$\curvearrowright \quad z' + (1-\alpha)az = (1-\alpha)b \quad \text{(lineare Dgl.)} \tag{7.28}$$

  Ein anderes Beispiel ist

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \tag{7.29}$$

$$\begin{aligned} y &= z \cdot x \\ y' &= z'x + z \\ z'x + z &= f(z) \\ z' &= \frac{f(z) - z}{x} \qquad \text{(separable Dgl.)} \end{aligned}$$

- Exakte Dgln. und integrierender Faktor

  Exakte Dgln. haben die Form:

$$y' = -\frac{P(x,y)}{Q(x,y)} \tag{7.30}$$

  Wir schreiben den Ausdruck um:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{P}{Q} \qquad | \cdot Q \cdot \mathrm{d}x$$

$$0 = P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y \tag{7.31}$$

  Wenn $\partial_y P = \partial_x Q$ gilt, dann existiert eine Funktion $f(x, y)$ mit

$$P = \partial_x f \ , \quad Q = \partial_y f \tag{7.32}$$

  und $f(x, y) = c$ ist allgemeine Lösung der Dgl.

  Beweis:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= c \\ \mathrm{d}f &= \partial_x f\,\mathrm{d}x + \partial_y f\,\mathrm{d}y = 0 \end{aligned}$$

  Wir identifizieren $P = \partial_x f$ und $Q = \partial_y f$. Wegen $\partial_y \partial_x = \partial_x \partial_y$ ist $\partial_y P = \partial_x Q$ vorauszusetzen. Dann folgt die Dgl $y' = -P/Q$.

q.e.d.

Auffinden von f: Variante 1

$$f(x,y) = \int \partial_x f \,\mathrm{d}x + g(y) \tag{7.33}$$

Dabei ist $g(y)$ eine „Integrationskonstante“, bezüglich der x-Integration, die aber i.a. noch von y abhängt. Wir setzen P in (7.33) ein:

$$f(x,y) = \int P \,\mathrm{d}x + g(y) \tag{7.34}$$

Wir bestimmen anschließend $g(y)$ aus

$$\partial_y f = \partial_y \int P \,\mathrm{d}x + \partial_y g \stackrel{!}{=} Q$$

$$\curvearrowright \quad \partial_y g = Q - \partial_y \int P \,\mathrm{d}x \tag{7.35}$$

Dabei hängt $\partial_y g$ nur von y ab, da

$$\partial_x \left(\partial_y g\right) = \partial_y Q - \partial_x \int \partial_y P \,\mathrm{d}x = \partial_y Q - \partial_y P = 0$$

$$\curvearrowright \quad g(y).$$

Beispiel:

$$y' = -\frac{y}{x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

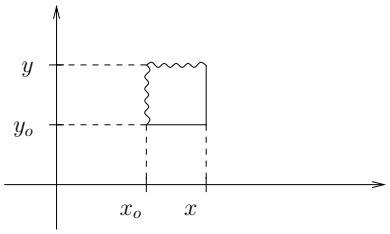
$$y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}x = 0$$

$$\partial_y y = \partial_x x = 1 \quad \curvearrowright \quad \text{Exaktheit erfüllt}$$

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= \int y\,\mathrm{d}x + g(y) = xy + g(y) \\
\partial_y f &= x + \partial_y g = Q = x \quad \curvearrowright \quad \partial_y g = 0 \\
\curvearrowright \quad g &= \tilde{c} \\
\curvearrowright \quad f(x,y) &= xy + \tilde{c} = \tilde{\tilde{c}} \\
\curvearrowright \quad xy &= c \\
\curvearrowright \quad y &= \frac{c}{x} \quad \text{ist Lösung}
\end{aligned}$$

Auffinden von f: Variante 2

Man kann f auch durch Integration entlang einens „Hakens“ finden:



$$f(x,y) = \int \mathrm{d}f = \int_{x_0}^{x} \partial_x f(\tilde{x}, y_0)\,\mathrm{d}\tilde{x} + \int_{y_0}^{y} \partial_y f(x,\tilde{y})\,\mathrm{d}\tilde{y} \quad (\text{unterer Weg}) \equiv \text{⌐} \tag{7.36}$$

oder

$$f(x,y) = \int \mathrm{d}f = \int_{x_0}^{x} \partial_x f(\tilde{x},y)\,\mathrm{d}\tilde{x} + \int_{y_0}^{y} \partial_y f(x_0,\tilde{y})\,\mathrm{d}\tilde{y} \quad \text{(oberer Weg)} \equiv \wr \tag{7.37}$$

Wir überprüfen dies jetzt für die obere Gleichung:

$$\begin{aligned}
\partial_x f(x,y) &= \partial_x f(x,y_0) + \int_{y_0}^{y} \partial_x \partial_y f(x,\tilde{y})\,\mathrm{d}\tilde{y} \\
&= \partial_x f(x,y_0) + \int_{y_0}^{y} \partial_y \partial_x f(x),\tilde{y})\,\mathrm{d}\tilde{y} \\
&= \partial_x f(x,y_0) + \partial_x f(x,\tilde{y})|_{y_0}^{y} \\
\partial_x f(x,y) &= \partial_x f(x,y_0) + \partial_x f(x,y) - \partial_x f(x,y_0).
\end{aligned}$$

Diese Gleichung ist offensichtlich erfüllt.

Noch einmal das Beispiel von oben:

$$y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y = 0$$

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= \int_{x_0}^{x} y_0\,\mathrm{d}\tilde{x} + \int_{y_0}^{y} x\,\mathrm{d}\tilde{y} \\
&= y_0(x-x_0) + x(y-y_0) \\
&= y_0 x + xy - xy_0 - x_0 y_0 \\
f(x,y) &= xy + \tilde{c} \quad \text{(das gleiche Ergebnis wie oben!)}
\end{aligned}$$

Wenn für $P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = 0$

$$\partial_y P \neq \partial_x Q$$

gilt, kann nach einem integrierenden Faktor $\mu(x,y)$ gesucht werden, mit dem die Dgl. zu einer exakten gemacht werden kann.

Multiplikation mit μ führt auf

$$\mu P\,\mathrm{d}x + \mu Q\,\mathrm{d}y = 0, \tag{7.38}$$

was äquivalent zur obigen Dgl. ist.

Exaktheit gilt für

$$\partial_y\left(\mu P\right) = \partial_x\left(\mu Q\right). \tag{7.39}$$

Ein geeignetes μ kann entweder erraten oder explizit bestimmt werden über:

$$\partial_y\mu \cdot P + \mu\partial_y P = \partial_x\mu \cdot Q + \mu\partial_x Q \tag{7.40}$$

$$Q\partial_x\mu - P\partial_y\mu + \left(\partial_x Q - \partial_y P\right)\mu = 0. \tag{7.41}$$

Dies ist eine partielle Dgl., deren Lösung i.a. recht schwierig ist, es genügt aber eine spezielle Lösung für μ.

Beispiel 1:

$$y' = \frac{y}{x}$$

$$y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y = 0 \quad \left| \; P(x,y) = y,\; Q(x,y) = -x \right.$$

$$\partial_y(y) = 1 \neq \partial_x(-x) = -1$$

Die Dgl. ist also nicht exakt; wir suchen deshalb einen integrierenden Faktor:

$$\mu y \,\mathrm{d}x - \mu x \,\mathrm{d}y = 0$$

$$\partial_y(\mu y) \stackrel{!}{=} \partial_x(-\mu x)$$

Wir erraten jetzt ein μ:

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{1}{x^2} \\ \text{oder} \quad \mu &= \frac{1}{y^2} \\ \text{oder} \quad \mu &= \frac{1}{xy} \end{aligned}$$

Wir wählen $\mu = \frac{1}{xy}$: $\quad\curvearrowright\quad \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = 0$

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x + g(y) \\ f(x,y) &= \ln x + g \\ \partial_y f &= \partial_y g = -\frac{1}{y} \\ \curvearrowright \quad g &= -\ln y + c \\ f(x,y) &= \ln \frac{x}{y} + c_3 = c_2 \\ \frac{x}{y} &= c_4 \\ \curvearrowright \quad y &= cx \end{aligned}$$

Beispiel 2:

$$y' = \frac{y^2 + x^2 - 2x}{2y}$$

$$\begin{aligned} \left(2x - x^2 - y^2\right)\,\mathrm{d}x + 2y\,\mathrm{d}y &= 0 \\ \partial_y\left(2x - x^2 - y^2\right) &= -2y \neq \partial_x(2y) = 0 \end{aligned}$$

Die Dgl. ist also nicht exakt; wir suchen deshalb einen integrierenden Faktor:

$$Q\partial_x\mu - P\partial_y\mu + (\partial_x Q - \partial_y P) = 0 = 2y\partial_x\mu - \left(2x - x^2 - y^2\right)\partial_y\mu + 2y\mu$$

Ansatz:

$$\partial_y\mu = 0$$

$$\partial_x\mu + \mu = 0 \quad\curvearrowright\quad \mu = e^{-x}$$

$$e^{-x}\left(2x - x^2 - y^2\right)\,\mathrm{d}x + e^{-x}2y\,\mathrm{d}y = 0$$

$$\partial_y(\ldots) = -2y\,e^{-x} = \partial_x(\ldots)$$

Die „neue Dgl.“ ist also exakt.

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= \int \partial_y f \,\mathrm{d}y + g(x) \\
f(x,y) &= y^2\, e^{-x} + g(x) \\
\partial_x f &= -y^2\, e^{-x} + \partial_x g = e^{-x}\left(2x - x^2 - y^2\right) \\
\partial_x g &= \left(2x - x^2\right)\, e^{-x} \\
g &= x^2 e^{-x} + c_1 \\
f(x,y) &= \left(y^2 + x^2\right)\, e^{-x} + c_1 = c_2 \\
\left(y^2 + x^2\right)\, e^{-x} &= c \\
y &= \pm\sqrt{c\, e^x - x^2}
\end{aligned}$$

2.2 Lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung

2.2.1 Struktur der Lösung

- Definition: Eine Dgl., die in der Form

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = q(x) \tag{7.42}$$

aufgeschrieben werden kann, heißt lineare Dgl. 2. Ordnung.

- Ist $q = 0$ nennt man die Dgl. homogen:

$$y'' + p_1 y' + p_2 y = 0 \tag{7.43}$$

- Ist $q \neq 0$ nennt man die Dgl. inhomogen:

$$y'' + p_1 y' + p_2 y = q \tag{7.44}$$

- Die allgemeine Lösung einer Dgl. diesen Typs besteht aus

  1. der allgemeinen Lösung der homogenen Dgl.
  2. und einer speziellen Lösung der inhomogenen Dgl.

- Die allgemeine Lösung y_h der homogenen Dgl. hat folgende Struktur:
  Es gibt zwei linear unabhängige Lösungen $y_1(x),\ y_2(x)$, die auch Fundamentalsystem genannt werden. Zwei Lösungen $y_1(x),\ y_2(x)$ sind linear unabhängig, wenn aus

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) = 0$$

für alle erlaubten x

$$c_1 = c_2 = 0$$

folgt. Die lineare Unabhängigkeit wird mit der Wronski-Determinante überprüft:

$$W(x) := \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \tag{7.45}$$

$y_1,\ y_2$ sind linear unabhängig, wenn

$$W(x) \neq 0$$

gilt.

Beweis:

Für lineare Unabhängigkeit von y_1 und y_2 muß zumindest

$$y_1 c_1 + y_2 c_2 = 0 \tag{7.46}$$

gelten. Differentiation nach x ergibt eine weitere Gleichung

$$y_1{}' c_1 + y_2{}' c_2 = 0 \tag{7.47}$$

(7.46) und (7.47) stellen ein algebraisches Gleichungssystem zur Bestimmung von c_1 und c_2 dar. Wenn die Koeffizientendeterminante nicht verschwindet, existiert nur die triviale Lösung $c_1 = c_2 = 0$. Die Koeffizientendeterminante ist aber gerade die Wronski-Determinante. Nichtverschwindende Wronski-Determinante impliziert somit $c_1 = c_2 = 0$. Dann sind y_1 und y_2 aber linear unabhängig.

q.e.d.

$\curvearrowright$ Die allgemeine Lösung der homogenen Dgl. ist also:

$$y_h = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) \tag{7.48}$$

wobei $\{y_1(x),\ y_2(x)\}$ das Fundamentalsystem der Dgl. und $c_1,\ c_2$ beliebige Konstanten sind.

- Auffinden einer spezielle Lösung y_i der inhomogenen Gleichung.

  Eine Möglichkeit ist das Erraten von y_i. Eine zweite Möglichkeit ist das Verfahren „Variation der Konstanten“. Dazu macht man den Ansatz

$$y_i = c_1(x) \cdot y_1(x) + c_2(x) \cdot y_2(x) \tag{7.49}$$

wobei $\{y_1, y_2\}$ das Fundamentalsystem der homogenen Dgl. ist. Diesen Ansatz setzt man in die inhomogene Dgl ein:

$$\begin{aligned}
&\cdot p_2 \parallel \quad y_i &&= c_1 y_1 + c_2 y_2 \\
&\cdot p_1 \parallel \quad y_i' &&= c_1 y_1' + c_2 y_2' + c_1' y_1 + c_2' y_2 \\
&\qquad\quad y_i'' &&= c_1 y_1'' + c_2 y_2'' + 2\,(c_1' y_1' + c_2' y_2') + c_1'' y_1 + c_2'' y_2 \\
\curvearrowright\quad &y_i'' + p_1 y_i' + p_2 y_i &&= c_1 \left(\underbrace{y_1'' + p_1 y_1' + p_2 y_1}_{=0} \right) + c_2 \left(\underbrace{y_2'' + p_1 y_2' + p_2 y_2}_{=0} \right) \\
&&&\quad + p_1 \left(c_1' y_1 + c_2' y_2\right) + 1 \cdot \left(c_1' y_1' + c_2' y_2'\right) \\
&&&\quad + 1 \cdot \underbrace{\left(c_1' y_1' + c_2' y_2'\right) + c_1'' y_1 + c_2'' y_2}_{=\left(c_1' y_1 + c_2' y_2\right)'} \\
&&&= q(x)
\end{aligned}$$

Die Dgl. liefert nur eine Bedingung für $c_1',\ c_2'$. Eine zweite Bedingung kann also willkürlich gewählt werden. Wir wählen

$$c_1' y_1 + c_2' y_2 = 0 \tag{7.50}$$

Es verbeiben dann die Gleichungen:

$$c_1' y_1 + c_2' y_2 = 0 \tag{7.51}$$

$$c_1' y_1' + c_2' y_2' = q \tag{7.52}$$

$$\curvearrowright \quad c_1' = \frac{1}{W} \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ q & y_2' \end{vmatrix} \quad \curvearrowright \quad c_1(x) \tag{7.53}$$

$$\curvearrowright \quad c_2' = \frac{1}{W} \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & q \end{vmatrix} \quad \curvearrowright \quad c_2(x) \tag{7.54}$$

Die allgemeine Lösung der Dgl. ist dann:

$$y(x) = c_1 y_1 + c_2 y_2 + y_i \tag{7.55}$$

Die Lösung enthält zwei Integrationskonstanten, c_1 und c_2.

Wir geben jetzt Anfangswerte für die Dgl. vor:

$$y(x_0) = y_0 \tag{7.56}$$
$$y'(x_0) = y_0' \tag{7.57}$$

Durch die Anfangswerte werden c_1 und c_2 eindeutig festgelegt. Die Dgl. liefert also zusammen mit Anfangswerten eine eindeutige Lösung.

- Beispiel:

$$y'' + \frac{2x+1}{2x(x+1)}y' - \frac{1}{4x(x+1)}y = \frac{3}{2}\,\frac{35x^2+5x+1}{\sqrt{x(x+1)}}$$

Das Fundamentalsystem lautet:

$$y_1 = \sqrt{x}\,, \quad y_2 = \sqrt{x+1}$$

Wir überprüfen jetzt, ob das Fundamentalsystem linear unabhängig ist:

$$\begin{aligned} W &= \begin{vmatrix} \sqrt{x} & \sqrt{x+1} \\ \frac{1}{2\sqrt{x}} & \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{x+1}} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x+1}{x}} \\ &= \frac{x-(x+1)}{2\sqrt{(x+1)x}} = -\frac{1}{2\sqrt{(x+1)x}} \neq 0 \end{aligned}$$

Die homogene Lösung lautet also

$$y_h = c_1\sqrt{x} + c_2\sqrt{x+1}$$

Für die spezielle inhomogene Lösung machen wir den Ansatz

$$y_i = c_1(x)\sqrt{x} + c_2(x)\sqrt{x+1}$$

$$\begin{aligned} \curvearrowright \quad c_1'\sqrt{x} + c_2'\sqrt{x+1} &= 0 \\ c_1'\frac{1}{2\sqrt{x}} + c_2'\frac{1}{2\sqrt{x+1}} &= \frac{3}{2}\,\frac{35x^2+5x+1}{\sqrt{x(x+1)}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \curvearrowright \quad c_1' &= -2\sqrt{x(x+1)}\left(-\sqrt{x+1}\,\frac{3}{2}\,\frac{35x^2+5x+1}{\sqrt{x(x+1)}}\right) \\ c_1' &= 3\sqrt{x+1}\left(35x^2+5x+1\right) \end{aligned}$$

Analog berechnet man

$$c_2' = -3\sqrt{x}\left(35x^2+5x+1\right)$$

Integration von c_1' liefert c_1. Dabei wird die Substitutionen $x+1=t$, $\sqrt{t}=z$ verwendet. Es folgt

$$c_1(x) = 2\sqrt{(x+1)^3}\left(15x^2-9x+7\right).$$

c_2 folgt über die Substitution $\sqrt{x}=z$ zu

$$c_2(x) = 2\sqrt{x^3}\left(15x^2+3x+1\right)$$

Die spezielle inhomogene Lösung ist damit:

$$y_i(x) = 2\sqrt{x(x+1)}\left(3x^2-3x+7\right)$$

Die allgemeine Lösung ergibt sich zu:

$$y(x) = c_1\sqrt{x} + c_2\sqrt{x+1} + 2\sqrt{x(x+1)}\left(3x^2-3x+7\right)$$

2.2.2 Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

- Wir beschränken jetzt p_1 und p_2 auf im allgemeinen komplexe Konstanten. Dadurch vereinfacht sich das Finden der Lösung stark.
- Die Dgl. hat die allgemeine Form:

$$y'' + p_1 y' + p_2 y = q(x) \tag{7.58}$$

- Im Fall $p_1 = const$ und $p_2 = const$ kann das Fundamentalsystem einfach konstruiert werden. Wir betrachten die homogene Dgl.

$$y'' + p_1 y' + p_2 y = 0 \tag{7.59}$$

Wir benutzen einen Exponentialansatz für das Fundamentalsystem:

$$y_{1/2} = e^{rx} \tag{7.60}$$

Die Gleichung (7.59) ergibt

$$\begin{aligned} r^2\, e^{rx} + p_1\, r e^{rx} + p_2\, e^{rx} &= 0 \\ r^2 + p_1 r + p_2 &= 0 \end{aligned}$$

$$r_{1/2} = -\frac{p_1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p_1}{2}\right)^2 - p_2} \tag{7.61}$$

Dabei sind $r_{1/2}$ i.a. komplex.

$$\curvearrowright \quad y_h = c_1\, e^{r_1 x} + c_2\, e^{r_2 x} \tag{7.62}$$

Falls $r_1,\ r_2$ komplex sind und die Form

$$\begin{aligned} r_1 &= r = a + ib \\ r_2 &= \bar{r} = a - ib \end{aligned}$$

haben, lässt sich das Fundamentalsystem reellwertig machen. Das komplexe Fundamentalsystem ist in diesem Fall zunächst

$$y_1^* = e^{(a+ib)x} \tag{7.63}$$
$$y_2^* = e^{(a-ib)x} \tag{7.64}$$

Das gleichwertige relle Fundamentalsystem wird folgendermassen konstruiert:

$$y_1 = \frac{1}{2}\,(y_1^* + y_2^*) = e^{ax}\,\cos bx \tag{7.65}$$
$$y_2 = \frac{1}{2i}\,(y_1^* - y_2^*) = e^{ax}\,\sin bx \tag{7.66}$$

- Wir betrachten jetzt den Spezialfall $r_1 = r_2 = -\frac{p_1}{2}$:

  Es gibt nach der obigen Lösungsstrategie nur eine Lösung und zunächst kein vollständiges Fundamentalsystem. Wir behaupten aber, daß

$$y_1 = e^{rx} \qquad y_2 = x\, e^{rx} \tag{7.67}$$

ein Fundamentalsystem bilden.

Beweis:

y_1 und y_2 müssen Lösungen der Dgl. sein. Für y_1 ist dies klar, da y_1 als Lösung konstruiert wurde. Wir überprüfen jetzt, ob auch y_2 eine Lösung der Dgl. ist.

$$\begin{aligned} y_2' &= (1+rx)\,e^{rx} \\ y_2'' &= r\,e^{rx} + r(1+rx)\,e^{rx} \\ y_2'' &= r(2+rx)\,e^{rx} \end{aligned}$$

Einsetzen ergibt

$$\begin{aligned} r(2+rx)\,e^{rx} + p_1\,(1+rx)\;e^{rx} + p_2 x\,e^{rx} &= 0 \\ r^2x + 2r + p_1 + p_1 rx + p_2 x &= 0 \\ \underbrace{\left(r^2 + p_1 r + p_2\right)x}_{=0} + \underbrace{2r + p_1}_{=0} &= 0 \end{aligned}$$

y_2 ist also auch Lösung der Dgl. Jetzt muss noch überprüft werden, ob y_1 und y_2 linear unabhängig sind:

$$W = \begin{vmatrix} e^{rx} & x\,e^{rx} \\ r\,e^{rx} & (1+rx)\,e^{rx} \end{vmatrix} = e^{2rx}(1+rx-rx) = e^{2rx} \neq 0$$

Die Lösungen sind also auch linear unabhänging und bilden so ein Fundamentalsystem.

q.e.d.

- Beispiel:

$$y'' + y = x^2$$

Fundamentalsystem:

$$\begin{aligned} y'' + y &= 0\,, \quad y = e^{rx} \\ r^2 + 1 &= 0\,, \quad r = \pm i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_1^* &= e^{ix} \\ y_2^* &= e^{-ix} \\ y_1 &= \cos x \\ y_2 &= \sin x \end{aligned}$$

Als spezielle inhomogene Lösung wählen wir $y_i = x^2 - 2$

Probe: $y_i' = 2x$, $y_i'' = 2 \curvearrowright \quad y_i'' + y_i = x^2$

Die allgemeine Lösung ist dann:

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + x^2 - 2$$

Wir geben jetzt die Anfangswerte $y(0) = 1$ und $y'(0) = 0$ vor:

$$\begin{aligned} y(0) &= c_1 - 2 = 1 \quad \curvearrowright \quad c_1 = 3 \\ y'(0) &= c_2 = 0 \end{aligned}$$

Die Lösung des Anfangswertproblems ist damit.

$$y(x) = 3\cos x + x^2 - 2$$

2.2.3 Lösung von Differentialgleichungen mit Integraltransformationen

- Wir demonstrieren die Anwendbarkeit von Integraltransformationen für die Lösung von Dgln. an einem Beispiel:

$$y'' - 2y' + y = x^3\, e^x$$

$$y(0) = 0\,, \quad y'(0) = 0$$

- Gesucht ist $y(x)$ für $x > 0$. Es ist also naheliegend die Laplace Transformation zu verwenden.

- Wir erinnern uns an einige Eigenschaften der Laplace-Transformation.

$$\hat{T}_L y = Y: \quad Y(\omega) = \int_0^\infty y(x)\, e^{-\omega x}\, \mathrm{d}x$$

$$\hat{T}_L^{-1} Y = y: \quad y(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} Y(\omega)\, e^{\omega x}\, \mathrm{d}\omega$$

$$\hat{T}_L y' = \omega Y(\omega) - y(0)$$

$$\hat{T}_L y'' = \omega^2 Y(\omega) - \omega y(0) - y'(0)$$

- Wir wenden jetzt die Laplace-Transformation auf die gesamte Dgl. an. Wegen der Linearität von $\hat{T}_L$ gilt:

$$\hat{T}_L \left(y'' - 2y' + y\right) = \hat{T}_L y'' - 2\hat{T}_L y' + \hat{T}_L y = \hat{T}_L x^3\, e^x \tag{7.68}$$

$$\begin{aligned}
\curvearrowright \quad \omega^2 Y - 2\omega Y + Y &= \int_0^\infty x^3\, e^x\, e^{-\omega x}\, \mathrm{d}x\,; \quad \mathrm{Re}(\omega) > 1 \\
\int_0^\infty x^3\, e^{-(\omega-1)x}\, \mathrm{d}x &= \frac{1}{(\omega-1)^4} \int_0^\infty y^3\, e^{-y}\, \mathrm{d}y = \frac{6}{(\omega-1)^4} \\
\left(\omega^2 - 2\omega + 1\right) Y &= \frac{6}{(\omega-1)^4} \\
Y(\omega) &= \frac{6}{(\omega^2 - 2\omega + 1)\,(\omega-1)^4} = \frac{6}{(\omega-1)^6}
\end{aligned}$$

$$y(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{6}{(\omega-1)^6}\, e^{\omega x}\, \mathrm{d}\omega\,; \quad c > 1$$

Auswertung des Integrals mit dem Residuensatz:

$$\begin{aligned}
R(\omega = 1) &= \lim_{\omega \to 1} \frac{1}{5!}\, \mathrm{d}_\omega^5 \left\{ (\omega-1)^6 \frac{e^{\omega x}}{(\omega-1)^6} \right\} = \frac{1}{5!} x^5\, e^x \\
y(x) &= \frac{1}{2\pi i} 2\pi i \frac{1}{5!} x^5\, e^x = \frac{1}{20} x^5\, e^x
\end{aligned}$$

2.2.4 Lösung mit Potenzreihenansätzen

- Für nichtkonstante p_1 und p_2 gibt es keinen elementaren Weg, das Fundamentalsystem der Gleichung $y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0$ zu bestimmen. Wenn $p_1(x)$ und $p_2(x)$ analytisch sind, können sie in Potenzreihen entwickelt werden; dann kann man einen Potenzreihenansatz für $y(x)$ benutzen.

- Beispiel: Wir wollen das Fundamentalsystem der Dgl.

$$y'' + xy = 0 \qquad (p_1 = 0\,, \quad p_2 = x) \tag{7.69}$$

bestimmen.

Dazu wird als Ansatz ein Potenzreihe um $x_0 = 0$ verwendet:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad \text{(im Konvergenzgebiet)} \tag{7.70}$$

$$\curvearrowright \quad y' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \tag{7.71}$$

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^n \tag{7.72}$$

Einsetzen in die Dgl. (7.69) führt zu:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = 0 \tag{7.73}$$

In der linken Summe transformieren wir die Indizes: $n = n' + 3$

$$\sum_{n'=-1}^{\infty} (n'+3)(n'+2) a_{n'+3} x^{n'+1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = 0$$

Jetzt wird n' in n umbenannt und der Summand für $n' = -1$ von der linken Summe abgespalten.

$$2 \cdot a_2 + \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ (n+3)(n+2) a_{n+2} + a_n \right\} x^{n+1} = 0$$

Über Koeffizientenvergleich werden die a_n bestimmt. In diesem Fall ist die rechte Seite $\equiv 0$, deshalb müssen die Koeffizienten aller Potenzen von x verschwinden.

$$\begin{aligned}
x^0 &: \quad 2 \cdot a_2 = 0 \quad \curvearrowright \quad a_2 = 0 \\
x^1 &: \quad 3 \cdot 2 \cdot a_3 + a_0 = 0 \quad \curvearrowright \quad a_3 = -\tfrac{1}{2 \cdot 3} a_0 \\
&\;\;\vdots \\
x^{n+1} &: \quad (n+3)(n+2) a_{n+2} + a_n = 0 \quad \curvearrowright \quad a_{n+3} = -\tfrac{a_n}{(n+2)(n+3)} \quad n = 0, 1, 2, \ldots
\end{aligned}$$

$\curvearrowright$

$$\begin{aligned}
a_0 &= c_1 \quad \text{beliebig} & a_5 &= 0 \\
a_1 &= c_2 \quad \text{beliebig} & a_6 &= +\tfrac{c_1}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6} \\
a_2 &= 0 & a_7 &= +\tfrac{c_2}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} \\
a_3 &= -\tfrac{c_1}{2 \cdot 3} & &\text{u.s.w.} \\
a_4 &= -\tfrac{c_2}{3 \cdot 4}
\end{aligned}$$

Die Lösung lautet dann:

$$\begin{aligned} y(x) &= c_1 + c_2 x - \frac{c_1}{2\cdot 3}x^3 - \frac{c_2}{3\cdot 4}x^4 + \frac{c_1}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6}x^6 + \frac{c_2}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7}x^7 + \cdots \\ y(x) &= c_1\left\{1 - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1\cdot 4}{6!}x^6 - \frac{1\cdot 4\cdot 7}{9!}x^9 \pm \cdots\right\} \\ &+ c_2\left\{x - \frac{2}{4!}x^4 + \frac{2\cdot 5}{7!}x^7 - \frac{2\cdot 5\cdot 8}{10!}x^{10} \pm \cdots\right\} \end{aligned} \tag{7.74}$$

Ob die Teilreihen konvergieren und damit eine sinnvolle Lösung darstellen, lässt sich mit dem Wurzelkriterium überprüfen.

$$\begin{aligned} c_1 &: \quad \lim_{l\to\infty}\sqrt[l]{\left|\tfrac{1\cdot 4\cdot 7\cdots(l-2)}{l!}x^l\right|} = 0\cdot|x| \quad \forall|x|<\infty \\ c_2 &: \quad \text{analog} \end{aligned}$$

Die Teilreihen konvergieren und (7.74) ist allgemeine Lösung von (7.69).

- Verallgemeinert sieht der Potenzreihenansatz fogendermaßen aus:

$$y(x) = (x-x_0)^\rho \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \tag{7.75}$$

Der Potenzreihenansatz ist für viele Dgln. der Mathematischen Physik erfolgreich.

Die erhaltenen Potenzreihen definieren neue Funktionen. Beispiele folgen.

- Legendre-Dgl.

$$y'' - \frac{2x}{1-x^2}y' - \frac{k(k+1)}{1-x^2}y = 0 \tag{7.76}$$

k ist dabei ganzzahlig. Die Lösungen der Dgl. sind die Legendre-Polynome

$$P_k(x) = \frac{1}{2^k k!}\,\mathrm{d}_x^k\left(x^2-1\right)^k \tag{7.77}$$

Diese Dgl. tritt besonders bei kugelsymmetrischen Problemen auf.

- Hermite-Dgl.

$$y'' - 2xy' + 2ky = 0 \tag{7.78}$$

k ist dabei ganzzahlig. Die Lösungen der Dgl. sind die Hermite-Polynome

$$H_k(x) = (-1)^k e^{x^2}\,\mathrm{d}_x^k e^{-x^2} \tag{7.79}$$

Diese Dgl. tritt beim quantisierten harmonischen Oszillator auf.

- Verallgemeinerte Laguerre-Dgl.

$$y'' + \frac{s+1-x}{x}y' + \frac{k}{x}y = 0 \tag{7.80}$$

k ist dabei ganzzahlig und $s \geq 0$. Die Lösungen der Dgl. sind die verallgemeinerten Laguerre-Polynome $L_k^s(x)$.

Diese Dgl. tritt in der Quantenmechanik des H-Atoms auf.

- Bessel-Dgl.

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{p^2}{x^2}\right)y = 0 \tag{7.81}$$

p ist dabei reellwertig. Die Lösungen der Dgl. sind die Bessel-Funktionen $J_p(x)$ 1. und 2. Art.

Diese Dgl. tritt bei zylindersymmetrischen Problemen auf.

2.3 Systeme von Differentialgleichungen 1. Ordnung

- Bisher haben wir eine Dgl. betrachtet und nach einer Funktion $y(x)$ als Lösung gesucht. Jetzt betrachten wir mehrere verkoppelte Dgln. und suchen ein Funktionen-Tupel $\underline{y}(x)$ als Lösung.
- Beispiel: 2 Dgln. für $\underline{y}(x) = \begin{pmatrix} u(x) \\ v(x) \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} (u')^2 + u \cdot v &= e^x \\ v'' + \ln u &= \sin x \end{aligned}$$

- Lösungsversuche:
  1. Entkopplung, z.B.

$$\begin{aligned} u &= e^{\sin x - v''} \\ u' &= e^{\sin x - v''} (\cos x - v''') \end{aligned}$$

Durch Einsetzen läßt sich eine entkoppelte Dgl. 3. Ordnung für v erzeugen.

$$e^{2(\sin x - v'')} (\cos x - v''')^2 + v\, e^{\sin x - v''} = e^x$$

  2. Überführung in ein System von Dgln. 1. Ordnung

$$w = v' \quad \curvearrowright \quad w' = v''$$

$$\curvearrowright \quad \begin{aligned} (u')^2 + u \cdot v &= e^x \\ w' + \ln u &= \sin x \\ v' &= w \end{aligned}$$

bzw. in expliziter Form

$$\begin{aligned} u' &= \pm\sqrt{e^x - u \cdot v} \\ v' &= w \\ w' &= \sin x - \ln u. \end{aligned}$$

Die Lösung dieser Systeme ist i.a. nur numerisch möglich. Der Ansatzpunkt für ein numerisches Standardverfahren (Runge-Kutta-Verfahren) ist die explizite Form eines Systems von Dgln. 1. Ordnung. (vgl. Vorlesung „Computational Physics“).

2.3.1 Dgln. höherer Ordnung und Systeme von Dgln. 1. Ordnung

Differentialgleichungen höherer Ordnung lassen sich in ein System von Dgln. 1. Ordnung überführen.

- Wir betrachten die Dgl.

$$y^{(n)} = f\left(y^{(n-1)}, \ldots, y'', y', y, x\right) \tag{7.82}$$

- Wir betrachten ein n-Tupel von Funktionen $z_i(x)$

$$\underline{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \tag{7.83}$$

und fordern

$$\begin{aligned} y &\equiv z_1 \\ y' &= z_1' = z_2 \\ y'' &= z_2' = z_3 \\ y''' &= z_3' = z_4 \\ &\vdots \\ y^{(n-1)} &= z_{n-1}' = z_n \\ y^{(n)} &= z_n' \end{aligned} \tag{7.84}$$

Es entstehen also n Dgln. 1. Ordnung für $z_1, \ldots, z_n$:

$$\begin{aligned} z_1' &= z_2 \\ z_2' &= z_3 \\ &\vdots \\ z_{n-1}' &= z_n \\ z_n' &= f(z_n, z_{n-1}, \ldots, z_2, z_1, x) \end{aligned} \tag{7.85}$$

Die Gleichungen können auch kompakter geschrieben werden:

$$\underline{z}' = \underline{F}(\underline{z}, x) \tag{7.86}$$

mit dem Vektor

$$\underline{F} = \begin{pmatrix} z_2 \\ z_3 \\ \vdots \\ z_n \\ f \end{pmatrix} \tag{7.87}$$

2.3.2 Lineare Systeme von Differentialgleichungen 1. Ordnung

- Ein Differentialgleichungs-System der Form

$$\begin{aligned} z_1' + a_{11}z_1 + a_{12}z_2 + \ldots + a_{1n}z_n &= q_1 \\ z_2' + a_{21}z_1 + a_{22}z_2 + \ldots + a_{2n}z_n &= q_2 \\ &\vdots \\ z_n' + a_{n1}z_1 + a_{n2}z_2 + \ldots + a_{nn}z_n &= q_n \end{aligned} \tag{7.88}$$

heißt lineares System 1. Ordnung.
Die Kompaktschreibweise lautet:

$$\underline{z}' + \underline{\underline{a}}(x)\underline{z} = \underline{q} \tag{7.89}$$

mit

$$\underline{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{a}} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \underline{q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix} \tag{7.90}$$

Im Allgemeinen sind $a_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta}(x)$ und $q_\alpha = q_\alpha(x)$ Funktionen von x.

- Die Lösungsstruktur des Systems ist wiederum

$$\underline{z}(x) = \underline{z}_h(x) + \underline{z}_i(x) \tag{7.91}$$

wobei $\underline{z}_h$ die allgemeine Lösung des homogenen Systems

$$\underline{z}' + \underline{\underline{a}}\,\underline{z} = 0 \tag{7.92}$$

und $\underline{z}_i(x)$ eine spezielle Lösung des inhomogenen Systems (7.89) sind.

- Die Lösung des homogenen Systems hat die Form

$$\underline{z}_h = \sum_{\alpha=1}^{n} c_\alpha \underline{z}^\alpha \tag{7.93}$$

Dabei sind die $\underline{z}^\alpha$ Fundamentallösungen von (7.92). Der Index α ist hier hochgesetzt, um jegliche Verwechslung mit dem unten stehenden Komponentenindex in (7.90) auszuschließen.

- Lösung des inhomogenen Systems

Variation der Konstanten führt wiederum zum Ziel. Der Ansatz dazu ist:

$$\underline{z}_i = \sum_{\alpha=1}^{n} c_\alpha(x) \underline{z}^\alpha \tag{7.94}$$

Es folgt

$$\underline{z}_i{}' = \sum_\alpha \left(c_\alpha{}' \underline{z}^\alpha + c_\alpha \underline{z}^{\alpha\prime} \right)$$

$$\begin{aligned}
\sum_\alpha \left(c_\alpha{}' \underline{z}^\alpha + c_\alpha \underline{z}^{\alpha\prime} \right) + \underline{\underline{a}} \sum_\alpha c_\alpha \underline{z}^\alpha &= \underline{q} \\
\sum_\alpha c_\alpha{}' \underline{z}^\alpha + c_\alpha \underbrace{\left\{ \underline{z}^{\alpha\prime} + \underline{\underline{a}}\,\underline{z}^\alpha \right\}}_{=0} &= \underline{q} \\
\underline{z}^1 \cdot c_1{}' + \underline{z}^2 \cdot c_2{}' + \cdots + \underline{z}^n \cdot c_n{}' &= \underline{q}
\end{aligned} \tag{7.95}$$

Dies ist ein lineares System algebraischer Gleichungen für $c_1{}', \ldots, c_n{}'$. Auflösen läßt es sich z.B. mit der Cramer-Regel:

$$c_1{}' = \frac{\begin{vmatrix} q_1 & z_1^2 & \cdots & z_1^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_n & z_n^2 & \cdots & z_n^n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} z_1^1 & \cdots & z_1^n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ z_n^1 & \cdots & z_n^n \end{vmatrix}} \tag{7.96}$$

Anschließende Integration liefert $c_1(x)$. Für c_2, c_3, ... ist entsprechend zu verfahren.

- Bestimmung des Fundamentalsystems

Es existiert kein Algorithmus zum Auffinden des Fundamentalsystems. Möglichkeiten, um das Fundamentalsystem trotzdem zu bestimmen sind:

  - Erraten

- Substitutionen
- Potenzreihen
- Im Fall von $a_{\alpha\beta} = \text{const}$ existert ein Algorithmus!

- Bestimmung des Fundamentalsystems $\{\underline{z}^\alpha\}$ für den Fall $a_{\alpha\beta} = \text{const}$, also für ein System von Dgln. 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten.

  Der grundlegende Gedanke ist eine Diagonalisierung von $\underline{\underline{a}}$ durch Hauptachsentransformation und damit eine Entkoppelung der Dgln.

  Man verwendet den Ansatz

  $$\underline{z}^\alpha(x) = \underline{\zeta}^\alpha \, e^{-\lambda_\alpha x}; \tag{7.97}$$

  dabei sind

  - λ_α die Eigenwerte von $\underline{\underline{a}}$
  - und $\underline{\zeta}^\alpha$ die Eigenvektoren von $\underline{\underline{a}}$.

  Die λ_α und $\underline{\zeta}^\alpha$ sind zunächst aus der Eigenwertgleichung

  $$\underline{\underline{a}}\,\underline{\zeta}^\alpha = \lambda_\alpha \underline{\zeta}^\alpha$$

  zu bestimmen. Ansatz (7.97) löst dann (7.92), denn

  $$\underline{z}^{\alpha\prime}(x) = -\lambda_\alpha \underline{\zeta}^\alpha \, e^{-\lambda_\alpha x} \tag{7.98}$$

  $$\begin{aligned} \underline{z}^{\alpha\prime} + \underline{\underline{a}}\,\underline{z}^\alpha &= -\lambda_\alpha \underline{\zeta}^\alpha \, e^{-\lambda_\alpha x} + \underline{\underline{a}}\,\underline{\zeta}^\alpha \, e^{-\lambda_\alpha x} \\ &= (-\lambda_\alpha + \lambda_\alpha)\,\underline{\zeta}^\alpha \, e^{-\lambda_\alpha x} = 0 \end{aligned}$$

  Die allgemeine homogene Lösung von (7.92) lautet

  $$\underline{z}_h = \sum_{\alpha=1}^{n} c_\alpha \underline{\zeta}^\alpha \, e^{-\lambda_\alpha x} \tag{7.99}$$

  mit beliebigen reellen oder komplexen Konstanten c_α.

- Durch Vorgabe von Anfangswerten wird die Lösung eindeutig:

  $$\underline{z}(x_0) = \underline{z}_0 \tag{7.100}$$

  $$\underline{z}(x_0) = \underline{z}_h(x_0) + \underline{z}_i(x_0)$$

  $$\underline{z}_0 = \sum_\alpha c_\alpha \underline{\zeta}^\alpha \, e^{-\lambda_\alpha x_0} + \underline{z}_i(x_0) \tag{7.101}$$

  Dies ist ein lineares algebraisches Gleichungssystem für c_α, das die Lösung eindeutig bestimmt.

3 Partielle Differentialgleichungen

3.1 Lineare partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung

Es gibt drei Arten der linearen partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung: Laplace-Gleichung (oder Poisson-Gleichung), Wellengleichung und Wärmeleitungsgleichung. Die Laplace-Gleichung

tritt bei der Ermittlung des Potentialfelds (elektrostatisches Potential; Gravitationspotential) im Vakuum auf. Die zweidimensionale Form ist

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{7.102}$$

Die Laplace-Gleichung hat keine zeitliche Ableitung, sondern nur räumliche Ableitungen zweiter Ordnung. Lösungen der Laplace-Gleichung werden als harmonische Funktion bezeichnet. Die Poisson-Gleichung tritt bei der Ermittlung des Potentials mit der Quelle (Ladungsverteilung für das elektrostatische Potential; Massenverteilung für das Gravitationspotential) auf,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\rho(x, y) \tag{7.103}$$

Wenn keine Quelle oder Ladung im Problemgebiet existiert, reduziert sich die Poisson-Gleichung auf die Laplace-Gleichung.

Die Wellengleichung beschreibt ebene Wellen, und hat zeitliche und räumliche Ableitungen zweiter Ordnung,

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial u^2}{\partial x^2} \tag{7.104}$$

Die Wellen breiten sich mit der Geschwindigkeit c aus.

Die Wärmeleitungsgleichung oder Diffusionsgleichung hat die zeitliche Ableitung erster Ordnung und die räumliche Ableitung zweiter Ordnung,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + q(x) \tag{7.105}$$

Dies beschreibt eine räumliche Verteilung von u wie z.B. Temperaturverteilung auf einem Draht und ihre zeitliche Entwicklung. Der Term $q(x)$ stellt eine Wärmequelle oder -produktion an der Stelle x dar. Wenn es keine Wärmeproduktion gibt, setzt man $q(x) = 0$. Der Koeffizient κ wird als Diffusionskoeffizient bezeichnet, und trägt die Information, wie schnell sich das Feld wegen des Diffusionseffekts räumlich verbreitert. Im stationären Zustand fällt die zeitliche Ableitung weg, und die Wärmeleitungsgleichung reduziert sich auf die Laplace-Gleichung.

Im allgemein ist die Existenz der Lösung (oder analytische Lösung) der partiellen Differentialgleichung nicht garantiert, aber für lineare partielle Differentialgleichungen gibt es Methoden für das Auffinden der Lösung wie die Variablentrennung oder die Fourier-Analyse. Explizite Lösungen der Gl. (7.102)-(7.105) hängen von der Randbedingung und der Anfangsbedingung ab, und diese Art der Aufgabe wird als Randwertproblem bezeichnet.

Die Laplace- oder die Poisson-Gleichung wird aus der Analogie mit der Ellipsengleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{7.106}$$

als elliptische partielle Differentialgleichung bezeichnet. Ebenfalls wird die Wellengleichung aus der Analogie mit der Hyperbelgleichung

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{7.107}$$

als hyperbolische partielle Differentialgleichung; und die Wärmeleitungsgleichung aus der Analogie mit der Parabelgleichung

$$y = ax^2 + b \tag{7.108}$$

als parabolische partielle Differentialgleichung bezeichnet.

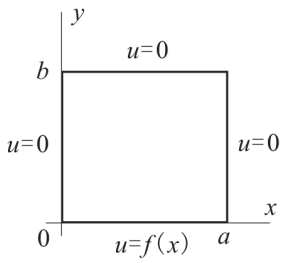


Abbildung 7.1: Randwerte für die Laplace-Gleichung.

3.2 Laplace-Gleichung

3.2.1 Randwertproblem auf einem begrenzten Gebiet

Die zweidimensionale Laplace-Gleichung auf dem Gebiet $0 < x < a$ und $0 < y < b$ ist

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{7.109}$$

Die Randbedingung ist (Fig. 7.1):

$$u(0, y) = 0 \tag{7.110}$$
$$u(a, y) = 0 \tag{7.111}$$
$$u(x, 0) = f(x) \tag{7.112}$$
$$u(x, b) = 0 \tag{7.113}$$

Wir lösen die Laplace-Gleichung mit dem Ansatz der Variablentrennung. Die partielle Differentialgleichung wird damit auf gewöhnliche Differentialgleichungen umgeschrieben, die leichter zu lösen sind. Der Ansatz lautet

$$u(x, y) = X(x)\, Y(y) \tag{7.114}$$

Die Laplace-Gleichung ergibt dann

$$X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = 0 \tag{7.115}$$

oder

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(Y)} \tag{7.116}$$

Wir evaluieren die Gl. (7.116) mit einer Konstante $-\lambda^2$,

$$X''(x) = -\lambda^2 X(x) \tag{7.117}$$
$$Y''(y) = \lambda^2 Y(y) \tag{7.118}$$

Die Lösungen der Gl. (7.117) für $X(x)$ sind trigonometrische Funktionen: $\sin(\lambda x)$, $\cos(\lambda x)$ und ihre Linearkombination. Die Randbedingung ist $X(0)Y(y) = 0$ und $X(a)Y(y) = 0$, deshalb muss die Funktion $X(x)$ die Bedingung $X(0) = X(a) = 0$ erfüllen. Die Lösung für $X(x)$ ist somit eine Sinus-Funktion,

$$X(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \quad (n = 1, 2, \cdots) \tag{7.119}$$

Die Konstante λ ist dabei

$$\lambda = \frac{n\pi}{a} \tag{7.120}$$

Die Gl. (7.117) ist linear und hat einen Freiheitsgrad bezüglich der Multiplikation von $X(x)$ mit einer Konstante. Die Lösung der Gl. (7.118) für $Y(y)$ ist eine Linearkombination der Exponentialfunktionen $e^{\lambda y}$ und $e^{-\lambda y}$. Aus der Randbedingung $Y(b) = 0$ (Gl. 7.113) wird $Y(y)$ wie folgt geschrieben:

$$Y(y) = \frac{e^{\lambda b}e^{-\lambda y} - e^{-\lambda b}e^{\lambda y}}{2} \tag{7.121}$$

$$= \sinh\left(\lambda(b-y)\right) \tag{7.122}$$

Die Lösung für $Y(y)$ hat ebenfalls einen Freiheitsgrad bezüglich der Multiplikationskonstante. Wir kombinieren $X(x)$ und $Y(y)$ mit dem Index n

$$X_n(x)Y_n(y) = \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\sinh\left(\frac{n\pi}{a}(b-y)\right) \tag{7.123}$$

wobei n eine ganze Zahl ist. Die Randbedingung $u(x,0) = f(x)$ muss noch für die Ermittlung der Lösung berücksichtigt werden. Dafür gibt es eine Strategie: Wir benutzen die Lösungen unter der homogenen Randbedingung $u(x,0) = 0$ als Ansatz und bestimmen die Koeffizienten für die Lösungen unter der inhomogenen Randbedingung $u(x,0) = f(x)$.

Da die Laplace-Gleichung linear ist, ist die Linearkombination von $X_n(x)Y_n(y)$ auch eine Lösung,

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\sinh\left(\frac{n\pi}{a}(b-y)\right) \tag{7.124}$$

Der Freiheitsgrad für $X(x)$ und $Y(y)$ ist im Koeffizienten A_n enthalten. Nun setzen wir die Randbedingung $u(x,0) = f(x)$,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\sinh\left(\frac{n\pi b}{a}\right) \tag{7.125}$$

Die Gl. (7.125) kann als Fourier-Reihe von $f(x)$ betrachtet werden. Der Koeffizient von $\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$ wird wie folgt bestimmt:

$$A_n \sinh\left(\frac{n\pi b}{a}\right) = \frac{2}{a}\int_0^a f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\,dx \tag{7.126}$$

Die Gl. (7.124) erflüllt damit alle Randbedingungen und ist die Lösung in der endgültigen Form.

3.2.2 Unbegrenztes Gebiet in einer Richtung

Die Laplace-Gleichung kann auf einem unbegrenzten Gebiet in der x-Richtung gelöst werden. Die Randbedingung bezüglich der y-Richtung ist (Fig. 2):

$$u(x,0) = 0 \tag{7.127}$$

$$u(x,b) = f(x) \tag{7.128}$$

Die Methode der Variablentrennung ist hierbei auch gültig, aber der Parameter λ kann eine beliebige Zahl sein und die Lösung wird als Integration über λ gegeben,

$$u(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(A(\lambda)e^{\lambda y} + B(\lambda)e^{-\lambda y}\right)e^{i\lambda x}\,\lambda \tag{7.129}$$

Die Randbedingung (Gl. 7.127-7.128) ist dann

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(A(\lambda) + B(\lambda)\right)e^{i\lambda x} = 0 \tag{7.130}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(A(\lambda)e^{\lambda b} + B(\lambda)e^{-\lambda b}\right)e^{i\lambda x}\,d\lambda = f(x) \tag{7.131}$$

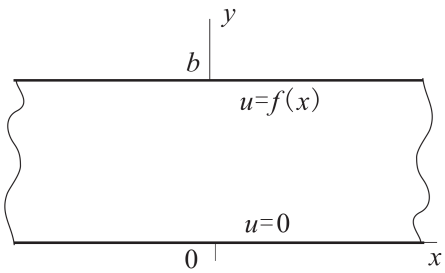


Abbildung 7.2: Gebiet ohne Grenze in der x-Richtung und mit Grenze in der y-Richtung.

Da die Integration von $-\infty$ bis ∞ läuft, können die zwei Integrationsterme mit $e^{i\lambda x}$ und $e^{-i\lambda x}$ auf eine Integration mit $e^{i\lambda x}$ zusammen gepackt werden.

Die Gl. (7.130) besteht bei einem beliebigen Wert von x, also $B(\lambda) = -A(\lambda)$. Die Gl. (7.131) wird

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} 2A(\lambda) \sinh(b\lambda) e^{i\lambda x}\, dx \tag{7.132}$$

oder

$$2A(\lambda) \sinh(\lambda b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\lambda x}\, dx \tag{7.133}$$

Wir setzen die Gl. (7.133) in die Gl. (7.129) ein,

$$u(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\lambda y} - e^{-\lambda y}}{2\sinh(\lambda b)} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x') e^{-i\lambda x'}\, dx' \right) e^{i\lambda x}\, d\lambda \tag{7.134}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sinh(\lambda y)}{\sinh(\lambda b)} f(x') e^{i\lambda(x-x')}\, dx'\, d\lambda \tag{7.135}$$

Die Lösung (Gl. 7.135) erflüllt die Randbedingung. Das kann man durch Einsetzen von $y = b$ und der Fourier-Darstellung der Deltafunktion überprüfen.

3.3 Poisson-Gleichung

3.3.1 Randwertproblem auf einem begrenzten Gebiet

Die Poisson-Gleichung auf einem begrenzten Gebiet $0 < x < a$, $0 < y < b$ ist

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\rho(x,y) \tag{7.136}$$

und die Randbedingung ist

$$u(0,y) = 0 \tag{7.137}$$

$$u(a,y) = 0 \tag{7.138}$$

$$u(x,0) = 0 \tag{7.139}$$

$$u(x,b) = 0 \tag{7.140}$$

Die Strategie ist die folgende. Wir suchen nach den Lösungen der homogenen Gleichung unter der gegebenen Randbedingung; bilden eine Linearkombination aus den Lösungen; benutzen sie als Ansatz für die Lösung der inhomogenen Gleichung und bestimmen die Koeffizienten aus der

Randbedingung. Aus der Methode der Variablentrennung ist die Funktion $\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$ eine Lösung der homogenen Gleichung. Wir bilden eine Linearkombination als Ansatz für $u(x,y)$ mit den Koeffizienten A_{mn},

$$u(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} A_{mn}\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \tag{7.141}$$

Einsetzen in die Poisson-Gleichung (Gl. 7.136) ergibt

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{m^2\pi^2}{a^2}+\frac{n^2\pi^2}{b^2}\right)A_{mn}\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) = \rho(x,y) \tag{7.142}$$

Die Gl. (7.142) kann als Doppel-Fourier-Reihe von $\rho(x,y)$ bezüglich x und y betrachtet werden. Wir multiplizieren die Gl. (7.142) mit $\sin(\frac{k\pi x}{a})\sin(\frac{l\pi y}{b})$ und bestimmen den Koeffizienten A_{mn}. Dazu integrieren wir über das Gebiet $0<x<a$ und $0<y<b$. Hierbei benutzen wir die folgende Relation:

$$\int_0^a \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{k\pi x}{a}\right)dx = \begin{cases}\frac{a}{2} & m=k\\ 0 & m\neq k\end{cases} \tag{7.143}$$

also

$$\left(\frac{k^2\pi^2}{a^2}+\frac{l^2\pi^2}{b^2}\right)A_{kl} = \frac{4}{ab}\int_0^a\int_0^b \rho(x,y)\sin\left(\frac{k\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{l\pi y}{b}\right)dy\,dx \tag{7.144}$$

Einsetzen in die Gl. (7.141) ergibt die Lösung in der folgenden Form:

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi^2\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)}\frac{4}{ab}\times \\ &\quad\left(\int_0^a\int_0^b \rho(v,w)\sin\left(\frac{m\pi v}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi w}{b}\right)dw\,dv\right)\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \end{aligned} \tag{7.145}$$

Die Lösung (Gl. 7.145) kann wie folgt arrangiert werden:

$$u(x,y) = \int_0^a\int_0^b G(x,y;v,w)\rho(v,w)\,dw\,dv \tag{7.146}$$

$$\begin{aligned} G(x,y;v,w) &= \frac{4}{ab\pi^2}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}}\times \\ &\quad\sin\left(\frac{m\pi v}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi w}{b}\right)\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \end{aligned} \tag{7.147}$$

wobei $G(x,y;v,w)$ die Green-Funktion ist.

Wenn die Ladungsverteilung eine Punktquelle ist,

$$\rho(x,y) = \delta(x-x_0)\,\delta(y-y_0) \quad (0<x_0<a, 0<y_0<b) \tag{7.148}$$

dann ist die Lösung als Green-Funktion gegeben.

$$u(x,y) = G(x,y;x_0,y_0) \tag{7.149}$$

Die Green-Funktion erfüllt nämlich die folgende Poisson-Gleichung

$$\frac{\partial^2 G(x,y;x_0,y_0)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 G(x,y;x_0,y_0)}{\partial y^2} = -\delta(x-x_0)\delta(y-y_0) \tag{7.150}$$

Die Green-Funktion stellt ein Potential dar, das durch eine Punktladung oder -quelle erzeugt wird. Im allgemeinen kann die Quelle eine kontinuierliche Verteilung der Ladung oder der Masse sein. In solchem Fall wird das Potential als Integration der Punktquellen mit der Green-Funktion wie in der Gl. (7.146) gegeben. Einsetzen der Gl. (7.147) in die Gl. (7.150) ergibt

$$\frac{4}{ab}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{m\pi x_0}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi y_0}{b}\right)\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)=\delta(x-x_0)\delta(y-y_0) \tag{7.151}$$

Die Gl. (7.151) ist in zwei Gleichungen bezüglich x und y trennbar,

$$\frac{2}{a}\sum_{m=1}^{\infty}\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{m\pi x_0}{a}\right) = \delta(x-x_0) \tag{7.152}$$

$$\frac{2}{b}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)\sin\left(\frac{n\pi y_0}{b}\right) = \delta(y-y_0) \tag{7.153}$$

Nun drücken wir $f(x)$ als Fourier-Reihe (Sinus-Funktion) aus,

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}b_k\sin\left(\frac{k\pi x}{a}\right) \tag{7.154}$$

multiplizieren die linke Seite der Gl. (7.152) mit $f(x)$ (Gl. 7.154) und integrieren über x,

$$\frac{2}{a}\sum_{m=1}^{\infty}\sin\left(\frac{m\pi x_0}{a}\right)\int_0^a\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\sum_{k=1}^{\infty}b_k\sin\left(\frac{k\pi x}{a}\right)dx$$

$$= \frac{2}{a}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}b_k\sin\left(\frac{m\pi x_0}{a}\right)\frac{a}{2}\delta_{km} \tag{7.155}$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty}b_m\sin\left(\frac{m\pi x_0}{a}\right) \tag{7.156}$$

$$= f(x_0) \tag{7.157}$$

Das entspricht der rechten Seite der Gl. (7.152), da sich das Integral die Funktion $f(x_0)$ ergibt,

$$\int_0^a f(x)\delta(x-x_0)dx=f(x_0) \tag{7.158}$$

3.4 Wellengleichung

3.4.1 Die d'Alembert-Methode

Die eindimensionale Wellengleichung auf einem unbegrenzten Gebiet ist

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\quad(-\infty<x<\infty, t>0) \tag{7.159}$$

und sie kann mit der folgenden Variablentransformation direkt gelöst werden,

$$v = x+ct \tag{7.160}$$

$$w = x-ct \tag{7.161}$$

Die Ableitungen nach t sind

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial}{\partial w} \tag{7.162}$$

$$= c\left(\frac{\partial}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial w}\right) \tag{7.163}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial w}\right)^2 \tag{7.164}$$

$$= c^2\left(\frac{\partial^2}{\partial v^2} - 2\frac{\partial^2}{\partial v\,\partial w} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) \tag{7.165}$$

Die Ableitung zweiter Ordnung nach x ist

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial v^2} + 2\frac{\partial^2}{\partial v\,\partial w} + \frac{\partial^2}{\partial w^2} \tag{7.166}$$

Die Wellengleichung (Gl. 7.159) wird dann in einer einfachen Form ausgedrückt,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial v\,\partial w} = 0 \tag{7.167}$$

Wir integrieren die Gl. (7.167) über w,

$$\frac{\partial u}{\partial v} = f(v) \tag{7.168}$$

und weiter integrieren wir über v,

$$u(v,w) = \int f(v)\,dv + \psi(w) \tag{7.169}$$

Wir schreiben den ersten Term auf der rechten Seite der Gl. (7.169) als $\phi(v)$. Die allgemeine Form der Lösung der Wellengleichung ist dann

$$u(v,w) = \phi(v) + \psi(w) \tag{7.170}$$

Wir geben nun die Anfangsbedingung vor:

$$u(x,0) = f(x) \tag{7.171}$$

$$\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = 0 \tag{7.172}$$

Die Funktionen ϕ und ψ erfüllen

$$\phi(x) + \psi(x) = f(x) \tag{7.173}$$

$$c\phi'(x) - c\psi'(x) = 0 \tag{7.174}$$

also

$$\phi(x) = \frac{1}{2}f(x) + a \tag{7.175}$$

$$\psi(x) = \frac{1}{2}f(x) - a \tag{7.176}$$

wobei a eine Konstante ist. Somit wird die Lösung für $u(x,y)$ wie folgt gegeben:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}f(x+ct) + \frac{1}{2}f(x-ct) \tag{7.177}$$

Dies bedeutet, dass sich die Wellenform am Anfang ($t = 0$) in zwei Teile trennt und sie breiten sich mit der Geschwindigkeit c nach links (in Richtung $x \to -\infty$) und nach rechts ($x \to \infty$) aus.

Für die Anfangsbedingung setzen wir nun wie folgt an:

$$u(x,0) = 0 \tag{7.178}$$

$$\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = f(x) \tag{7.179}$$

Die Lösung ist dann

$$u(x,t) = \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} f(s)\,ds \tag{7.180}$$

Als anderes Beispiel setzen wir nun die Anfangsbedingung wie folgt an:

$$u(x,0) = f(x) \tag{7.181}$$

$$\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = g(x) \tag{7.182}$$

Die Lösung ist dann

$$u(x,t) = \frac{1}{2}f(x+ct) + \frac{1}{2}f(x-ct) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)\,ds \tag{7.183}$$

Die Gl. (7.183) wird als d'Alembert-Lösung bezeichnet.

3.4.2 Fourier-Analyse auf einem begrenzten Gebiet

Wir lösen die Wellengleichung mit Hilfe der Fourier-Analyse unter der Randbedingung

$$u(0,t) = 0 \tag{7.184}$$

$$u(a,t) = 0 \tag{7.185}$$

und der Anfangsbedingung

$$u(x,0) = f(x) \tag{7.186}$$

$$\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = 0 \tag{7.187}$$

Mit dem Ansatz der Variablentrennung

$$u(x,t) = X(x)T(t) \tag{7.188}$$

wird die Wellengleichung

$$X(x)T''(t) = c^2X''(x)T(t) \tag{7.189}$$

also

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = c^2\frac{X''(x)}{X(x)} \tag{7.190}$$

Wir evaluieren die Gl. (7.190) mit der Konstanten $-c^2\lambda$,

$$T''(t) = -c^2\lambda T(t) \tag{7.191}$$

$$X''(x) = -\lambda X(x) \tag{7.192}$$

Aus der Randbedingung (Gl. 7.184-7.185) entsteht $X(0) = X(a) = 0$. Die Funktion $X(x)$ und die Konstante λ sind dann

$$X(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \tag{7.193}$$

$$\lambda = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 \tag{7.194}$$

Aus der Anfangsbedingung (Gl. 7.186-7.187) entsteht $T'(0) = 0$. Die Lösung der Gl. (7.191) ist

$$T(t) = \cos\left(\frac{n\pi ct}{a}\right) \tag{7.195}$$

Wir bilden eine Linearkombination

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi ct}{a}\right) \tag{7.196}$$

und bestimmen die Koeffizienten A_n für die Anfangsbedingung $u(x,0) = f(x)$,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \tag{7.197}$$

Die Gl. (7.197) kann also als Fourier-Reihe der Funktion $f(x)$ betrachtet werden. Die Koeffizienten A_n sind dann

$$A_n = \frac{2}{a}\int_0^a f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\, dx \tag{7.198}$$

Die Lösung wird als Fourier-Reihe gegeben. Die Gl. (7.196) ist

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} A_n \left(\sin\left(\frac{n\pi(x+ct)}{a}\right) + \sin\left(\frac{n\pi(x-ct)}{a}\right)\right) \tag{7.199}$$

Das reproduziert die direkte Lösung (Gl. 7.177),

$$u(x,t) = \frac{1}{2}f(x+ct) + \frac{1}{2}f(x-ct) \tag{7.200}$$

3.5 Fourier-Analyse auf einem unbegrenzten Gebiet

Wir lösen die Wellengleichung mit Hilfe der Fourier-Analyse auf einem unbegrenzten Gebiet $-\infty < x < \infty$. Die Fourier-Transformation von $u(x,t)$ bezüglich der Raumkoordinate ist

$$U(k,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)e^{-ikx}\, dx \tag{7.201}$$

Die Wellengleichung (Gl. 7.159) ist dann

$$\frac{\partial^2 U(k,t)}{\partial t^2} = -k^2c^2U(k,t) \tag{7.202}$$

Die Lösung für $U(k,t)$ ist

$$U(k,t) = A(k)e^{ikct} + B(k)e^{-ikct} \tag{7.203}$$

und $u(x,t)$ wird aus der Umkehrtransformation gegeben,

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \left(A(k)e^{ikct} + B(k)e^{-ikct}\right) e^{ikx}\, dk \tag{7.204}$$

Wir setzen nun die Anfangsbedingung an,

$$u(x,0) = f(x) \tag{7.205}$$

$$\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = g(x) \tag{7.206}$$

Aus der Gl. (7.204) folgt

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (A(k) + B(k))\, e^{ikx}\, dx \;=\; f(x) \tag{7.207}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} ikc\,(A(k) - B(k))\, e^{ikx}\, dk \;=\; g(x) \tag{7.208}$$

$A(k) + B(k)$ ist die Fourier-Transformation von $f(x)$, und $ikc\,(A(k) - B(k))$ ist die Fourier-Transformation von $g(x)$,

$$A(k) \;=\; \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(f(v) - \frac{i}{kc} g(v) \right) e^{-ikv}\, dv \tag{7.209}$$

$$B(k) \;=\; \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(f(v) + \frac{i}{kc} g(v) \right) e^{-ikv}\, dv \tag{7.210}$$

Wir setzen die Gl. (7.209) und (7.210) in die Gl. (7.204) ein,

$$\begin{aligned} u(x,t) \;=\; & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} f(v) (e^{ikct+ikx-ikv} + e^{-ikct+ikx-ikv})\, dv\, dk + \\ & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2ikc} g(v) (e^{ikct+ikx-ikv} - e^{-ikct+ikx-ikv})\, dv\, dk \end{aligned} \tag{7.211}$$

Aus der Fourier-Darstellung der Deltafunktion

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iwx}\, dw \tag{7.212}$$

entsteht

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{ik(ct+x-v)} + e^{-ik(ct-x+v)} \right) dk = \delta(v - x - ct) + \delta(v - x + ct) \tag{7.213}$$

Der erste Term auf der rechten Seite der Gl. (7.211) wird deshalb wie folgt evaluiert:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} f(v)\, (\delta(v - x - ct) + \delta(v - x + ct))\, dv = \frac{1}{2} f(x + ct) + \frac{1}{2} f(x - ct) \tag{7.214}$$

Für die Evaluation des zweiten Terms benutzen wir die Stufenfunktion (oder die Heaviside-Funktion):

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & (x > 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases} \tag{7.215}$$

Die Fourier-Darstellung von $\theta(x)$ ist

$$\theta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iwx}}{iw}\, dw \tag{7.216}$$

Das Integral über k im zweiten Term in der Gl. (7.211) wird aus der Gl. (7.216) evaluiert,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2ki} \left(e^{ik(ct+x-v)} - e^{ik(-ct+x-v)} \right) dk = \frac{1}{2} \left(\theta(ct + x - v) - \theta(-ct + x - v) \right) \tag{7.217}$$

Die Gl. (7.217) wird mit der Fallunterscheidung von θ ausgedrückt,

$$\theta(ct+x-v) = \begin{cases} 1 & (v < x+ct) \\ 0 & (v > x+ct) \end{cases} \tag{7.218}$$

$$\theta(-ct+x-v) = \begin{cases} 1 & (v < x-ct) \\ 0 & (v > x-ct) \end{cases} \tag{7.219}$$

Für $t > 0$ wird die Gl. (7.217) wie folgt ausgedrückt:

$$\frac{1}{2}\left(\theta(ct+x-v) - \theta(-ct+x-v)\right) = \begin{cases} \frac{1}{2}(0-0) = 0 & (v > x+ct) \\ \frac{1}{2}(1-0) = \frac{1}{2} & (x-ct < v < x+ct) \\ \frac{1}{2}(1-1) = 0 & (v < x-ct) \end{cases} \tag{7.220}$$

Der zweite Term in der Gl. (7.211) ist dann

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2ikc}g(v)\left(e^{ik(ct+x-v)} - e^{ik(-ct+x-v)}\right)dk\,dv = \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(v)\,dv \tag{7.221}$$

Einsetzen der Gl. (7.214) in den ersten Term in der Gl. (7.211); und die Gl. (7.221) in den zweiten Term ergibt

$$u(x,t) = \frac{1}{2}f(x+ct) + \frac{1}{2}f(x-ct) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(v)\,dv \tag{7.222}$$

Das ist nichts anders als die d'Alembert-Lösung (Gl. 7.183).

3.6 Wärmeleitungsgleichung

Die Wärmeleitungsgleichung kann auch mit der bisherigen Strategie gelöst werden: Variablentrennung, Bildung einer Linearkombination und Bestimmung der Koeffizienten für die Fourier-Analyse. Bei der Lösung der Wärmeleitungsgleichung tritt Dämpfung aufgrund der zeitlichen Ableitung erster Ordnung auf.

3.6.1 Homogene Gleichung auf einem begrenzten Gebiet

Die Wärmeleitungsgleichung auf dem Intervall $0 < x < a$ ist

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{7.223}$$

mit der Randbedingung

$$u(0,0) = 0 \tag{7.224}$$

$$u(a,0) = 0 \tag{7.225}$$

und der Anfangsbedingung

$$u(x,0) = f(x) \tag{7.226}$$

Mit dem Ansatz der Variablentrennung $X(x)T(t)$ wird die Gl. (7.223) wie folgt ausgedrückt:

$$X(x)T'(t) = \kappa X''(x)T(t) \tag{7.227}$$

Evaluation der Gl. (7.227) mit der Konstante λ ergibt

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \kappa \frac{X''(x)}{X(x)} \tag{7.228}$$

$$= -\kappa\lambda \tag{7.229}$$

$X(x)$ muss daher eine trigonometrische Funktion sein. Aus der Randbedingung folgt $X(x)$ als eine Sinus-Funktion,

$$X(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \tag{7.230}$$

Die Konstante λ wird mit dem Index n ausgedrückt,

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 \tag{7.231}$$

$T(t)$ ist eine Exponentialfunktion,

$$T(t) = e^{-\kappa\lambda_n t} \tag{7.232}$$

Wir bilden nun eine Linearkombination für $u(x,t)$,

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\kappa\lambda_n t} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \tag{7.233}$$

Die Koeffizienten A_n werden aus der Anfangsbedingung (Gl. 7.226) bestimmt,

$$A_n = \frac{2}{a}\int_0^a f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx \tag{7.234}$$

Die Lösung wird also mit der Gl. (7.233) und der Gl. (7.234) ausgedrückt und verhält sich wie $u(x,t) \to 0$ bei $t \to \infty$. Aus der Randbedingung ist das Feld $u(x,t)$ (z.B. Temperaturfeld) Null am Rand. Die Temperatur wird nämlich Null überall bei $t \to \infty$.

Wir setzen nun eine andere Randbedingung,

$$\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0} = 0 \tag{7.235}$$

$$\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|_{x=a} = 0 \tag{7.236}$$

Das ist die adiabatische Bedingung, d.h. die Wärme fließt nicht über den Rand. Wir benutzen die Gl. (7.226) für die Anfangsbedingung. Nach der Variablentrennung wird $X(x)$ mit der Kosinus-Funktion ausgedrückt,

$$X(x) = \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \tag{7.237}$$

wobei der Index n auch Null sein kann. Wir bilden eine Linearkombination als Ansatz,

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{-\kappa\lambda_n t} \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \tag{7.238}$$

Die Koeffizienten werden aus der Anfangsbedingung (Gl. 7.226) bestimmt,

$$A_n = \frac{2}{a}\int_0^a f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx \tag{7.239}$$

Die Lösung wird deshalb mit der Gl. (7.238) und (7.239) ausgedrückt und nähert sich A_0 (Konstante) bei $t \to \infty$,

$$A_0 = \frac{2}{a}\int_0^a f(x)\, dx \tag{7.240}$$

Unter der adiabatischen Bedingung erreicht die Temperatur also den Mittelwert der initialen Temperaturverteilung.

3.6.2 Inhomogene Gleichung auf einem begrenzten Gebiet

Für das Problem mit der inhomogenen Gleichung fangen wir mit der Lösung der homogenen Gleichung an. Wir setzen die folgende Randbedingung auf dem Intervall $0 < x < \pi$ an:

$$u(x,0) = 0 \tag{7.241}$$
$$u(\pi,t) = u_0 \tag{7.242}$$

und die Anfangsbedingung

$$u(x,0) = f(x) \tag{7.243}$$

Wir spalten u in zwei Teile,

$$u(x,t) = v(x) + w(x,t) \tag{7.244}$$

Die Wärmeleitungsgleichung ist dann

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 w}{\partial x} + \kappa v''(x) \tag{7.245}$$

Wir wählen v wie folgt aus:

$$v''(x) = 0 \tag{7.246}$$
$$v(0) = 0 \tag{7.247}$$
$$v(\pi) = u_0 \tag{7.248}$$

und leiten die Wärmeleitungsgleichung für w her,

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \tag{7.249}$$

mit der Randbedingung

$$w(0,t) = 0 \tag{7.250}$$
$$w(\pi,t) = 0 \tag{7.251}$$

und der Anfangsbedingung

$$w(x,0) = f(x) - v(x) \tag{7.252}$$

Die Gl. (7.246)-(7.248) können wie folgt gelöst werden:

$$v(x) = \frac{u_0 x}{\pi} \tag{7.253}$$

Wir kombinieren die Gl. (7.253) mit der Gl. (7.252), und leiten die Lösung als Fourier-Reihe her.

Nun fügen wir einen Quelleterm ein,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + q(x) \quad (0 < x < \pi) \tag{7.254}$$

mit der Randbedingung

$$u(0,t) = 0 \tag{7.255}$$
$$u(\pi,t) = 0 \tag{7.256}$$

und der Anfangsbedingung

$$u(x,0) = f(x) \tag{7.257}$$

Wir spalten $u(x,t)$ in $v(x)$ und $w(x,t)$,

$$u(x,t) = v(x) + w(x,t) \tag{7.258}$$

Die Wärmeleitungsgleichung für $w(x,t)$ ist dann

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \kappa v''(x) + q(x) \tag{7.259}$$

$v(x)$ ist die Lösung der folgenden Gleichung:

$$\begin{aligned} \kappa v''(x) &= -q(x) && (7.260)\\ v(0) &= 0 && (7.261)\\ v(\pi) &= 0 && (7.262) \end{aligned}$$

und $w(x,t)$ erfüllt

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} &= \kappa \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} && (7.263)\\ w(0,t) &= 0 && (7.264)\\ w(\pi,t) &= 0 && (7.265)\\ w(x,0) &= f(x) - v(x) && (7.266) \end{aligned}$$

Die Lösung für $w(x,t)$ ist bereits in der Gl. (7.233)-(7.234) mit $f(x) \to f(x) - v(x)$ gegeben. Wir integrieren die Gl. (7.260) über x,

$$\kappa v'(x) = -\int_0^x q(y)\, dy + c_1 \tag{7.267}$$

und integrieren nochmal,

$$\kappa v(x) = -\int_0^x dz \int_0^z q(y)\, dy + c_1 x + c_2 \tag{7.268}$$

Wir bestimmen c_1 und c_2 aus der Randbedingung: $v(0) = v(\pi) = 0$:

$$\begin{aligned} \kappa v(0) &= c_2 && (7.269)\\ &= 0 && (7.270)\\ \kappa v(\pi) &= -\int_0^\pi dz \int_0^z q(y)\, dy + c_1 \pi + c_2 && (7.271)\\ &= 0 && (7.272) \end{aligned}$$

Die Konstante c_1 und c_2 werden wie folgt evaluiert:

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi dz \int_0^z q(y)\, dy && (7.273)\\ c_2 &= 0 && (7.274) \end{aligned}$$

3.6.3 Fourier-Analyse

Wir wenden die Fourier-Transformation von $u(x,t)$ bezüglich der Raumkoordinaten x an,

$$U(k_x, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t) e^{-ik_x x}\, dx \tag{7.275}$$

Die Wärmeleitungsgleichung ist dann

$$\frac{\partial U(k_x,t)}{\partial t} = -\kappa k_x^2 U(k_x,t) \tag{7.276}$$

Die Lösung ist

$$U(k_x,t) = F(k_x)e^{-\kappa k_x^2 t} \tag{7.277}$$

Wir führen die inverse Fourier-Transformation durch,

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F(k_x)e^{-\kappa k_x^2 t}e^{ik_x x}dk_x \tag{7.278}$$

Nun setzen wir die Anfangsbedingung $u(x,0) = f(x)$ an. Aus der Gl. (7.278) folgt

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F(k_x)e^{ik_x x}dk_x \tag{7.279}$$

$F(k_x)$ ist somit die Fourier-Transformation von $f(x)$,

$$F(k_x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ik_x x}dx \tag{7.280}$$

Die Gl. (7.278) und (7.280) ergeben die Lösung in der endgültigen Form,

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x')e^{-\kappa k_x^2 t}e^{ik_x(x-x')}\,dx'\,dk_x \tag{7.281}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4\pi\kappa t}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x')e^{-\frac{(x-x')^2}{4\kappa t}}\,dx' \tag{7.282}$$

Die Gl. (7.282) bedeutet, dass sich die Temperaturverteilung $f(u)$ bei $t = 0$ als Gaussverteilung mit der Varianz $2\kappa t$ verbreitert.

3.7 Green-Funktion

Die Green-Funktion bietet eine allgemeine Methode, um Differentialgleichungen unter der gegebenen Randbedingung oder Anfangsbedingung systematisch zu lösen. Wir schreiben eine inhomogene Differentialgleichung in einer allgemeinen Form mit dem Differentialoperator $\mathcal{L}$,

$$\mathcal{L}u(\underline{r}) = -\rho(\underline{r}) \tag{7.283}$$

Die Green-Funktion wird dabei wie folgt definiert:

$$\mathcal{L}G(\underline{r}-\underline{r}_0) = -\delta(\underline{r}-\underline{r}_0) \tag{7.284}$$

Die Lösung ist als Integral mit der Green-Funktion gegeben:

$$u(\underline{r}) = \int G(\underline{r}-\underline{x})\rho(\underline{x})\,d\underline{x} + u_0(\underline{r}) \tag{7.285}$$

wobei $u_0(\underline{r})$ die Lösung der homogenen Differentialgleichung ist.

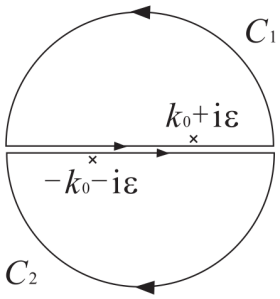


Abbildung 7.3: Integralkonturen für die Evaluation der Green-Funktion.

Helmholtz-Gleichung

Die Helmholtz-Gleichung tritt in der Elektrodynamik, Quantenmechanik und Quantenfeldtheorie auf,

$$\nabla^2 u(\underline{r}) + k_0^2\, u(\underline{r}) = -\rho(\underline{r}) \tag{7.286}$$

Hier ist k_0 eine Konstante. Für die Green-Funktion gilt

$$\nabla^2 u(\underline{r}) + k_0^2\, u(\underline{r}) = -\delta(\underline{r}) \tag{7.287}$$

Aus der Fourier-Transformation kann die Green-Funktion als Integral in der Wellenzahldomäne ausgedrückt werden,

$$G(\underline{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{e^{i\underline{r}\cdot\underline{k}}}{k^2 - k_0^2} d^3k \tag{7.288}$$

Die Gl. (7.288) kann mit $\mu = \cos\theta$ wie folgt geschrieben werden:

$$\begin{aligned} G(\underline{r}) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty \frac{k^2}{k^2 - k_0^2}\, dk \int_{-1}^{1} e^{ikr\mu}\, d\mu && (7.289)\\ &= \frac{1}{2\pi^2 r} \int_0^\infty \frac{k \sin(kr)}{k^2 - k_0^2}\, dk && (7.290)\\ &= \frac{1}{4\pi^2 r} \int_{-\infty}^\infty \frac{k \sin(kr)}{k^2 - k_0^2}\, dk && (7.291) \end{aligned}$$

Das Integral in der Gl. (7.291) kann wegen der Singularität bei k_0 nicht direkt evaluiert werden; jedoch ist es möglich, mit Hilfe der analytischen Fortsetzung das Integral zu evaluieren. Wir verschieben die Stelle der Singularität in Richtung imaginärer Achse, $k_0 \to k_0 + i\epsilon$. Die Green-Funktion ist dann

$$G(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi^2 r} \frac{1}{2i} \left(\int_{C_1} \frac{k e^{ikr}}{k^2 - (k_0 + i\epsilon)^2}\, dk - \int_{C_2} \frac{k e^{-ikr}}{k^2 - (k_0 + i\epsilon)^2}\, dk \right) \tag{7.292}$$

Die Konturen C_1 und C_2 werden in der Fig. 7.3 gezeigt. Mit Hilfe des Residuums bei $k_0 + i\epsilon$ für C_1 und bei $-k_0 - i\epsilon$ für C_2 kann das Integral wie folgt evaluiert werden:

$$\begin{aligned} G(\underline{r}) &= \frac{1}{4\pi^2 r} \frac{1}{2i} (\pi i e^{ik_0 r} + \pi i e^{ik_0 r}) && (7.293)\\ &= \frac{e^{ik_0 r}}{4\pi r} && (7.294) \end{aligned}$$

Hier haben wir $\epsilon \to 0$ gesetzt. Man kann auch die Verschiebung wie $k_0 \to k_0 - i\epsilon$ durchführen. In diesem Fall wird die Green-Funktion wie folgt ausgedrückt:

$$G(\underline{r}) = \frac{e^{-ik_0 r}}{4\pi r} \tag{7.295}$$

Die Gl. (7.294) stellt eine Welle (sphärische Welle) dar, die sich von der Quelle in der radialen Richtung nach draußen ausbreitet. Die Gl. (7.295) stellt eine Welle nach innen dar.

Kapitel 8

Integraltransformationen

1 Funktion und Transformierte

Wir betrachten eine Funktion $f(t)$

$$f \,|\, \mathbb{R}^1 \to \mathbb{C}^1$$

Eine Integraltransformation ist folgendermaßen definiert:

$$\hat{T}f \equiv \int_a^b f(t) \cdot \mathcal{K}(\omega, t)\,\mathrm{d}t = \mathcal{F}(\omega) \tag{8.1}$$

mit

- $\hat{T}$: symbolischer Transformationsoperator
- $\mathcal{F}(\omega)$: Transformierte von $f(t)$
- $\mathcal{K}(\omega, t)$: Kern der Transformation.

Bei geeigneter Wahl von $\mathcal{K}, a, b$ ist die Transformation eineindeutig und es existiert die inverse Transformation (Umkehrtransformation) $\hat{T}^{-1}$ mit

$$\hat{T}^{-1}\mathcal{F} = \hat{T}^{-1}\hat{T}f = f \tag{8.2}$$

$\hat{T}$ ist linear, denn (8.1)

$$\hat{T}(\alpha f + \beta g) = \alpha\hat{T}f + \beta\hat{T}g \tag{8.3}$$

Dabei sind α, $\beta \in \mathbb{C}$ und f, g Funktionen.

2 Fourier-Tansformation

Eine Integraltransformation $\hat{T}_F$ heißt Fourier-Tansformation, wenn gilt:

- $\mathcal{K}(\omega, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\omega t}$
- $a = -\infty$
- $b = +\infty$

Die Transformation $\hat{T}_F$: $\mathcal{F} = \hat{T}_F f$ ist dann folgendermaßen definiert:

$$\mathcal{F}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} \, \mathrm{d}t \tag{8.4}$$

Dabei ist $\mathcal{F}$ i.a. komplex.

Die Fouriertransformierte $\mathcal{F}(\omega)$ existiert nur, wenn das Integral wohldefiniert ist.

Zur Fouriertransformation existiert eine Umkehrtransformation $\hat{T}_F^{-1}$: $f = \hat{T}_F^{-1}\mathcal{F}$: Für stetige f gilt

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(\omega) e^{i\omega t} \, \mathrm{d}\omega. \tag{8.5}$$

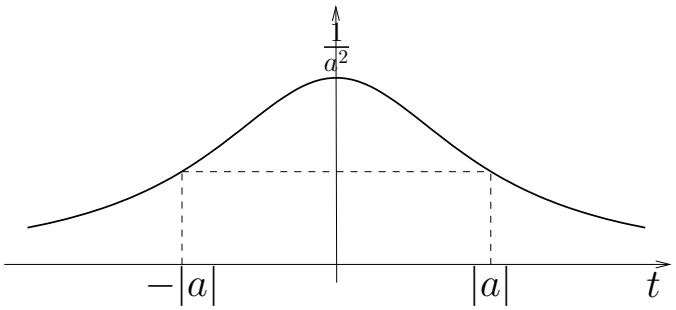
An möglichen Sprungstellen von f ist (8.5) durch

$$\frac{1}{2}\{f(t+0) + f(t-0)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(\omega) e^{i\omega t} \, \mathrm{d}\omega \tag{8.6}$$

zu ersetzen.

Die Formel wird hier ohne Beweis angegeben; es wird auf den Beweis des Fourier-Integralsatzes verwiesen, den man in der Literatur findet.

- Beispiel: $f(t) = \frac{1}{t^2+a^2}$; $a \in \mathbb{R}$

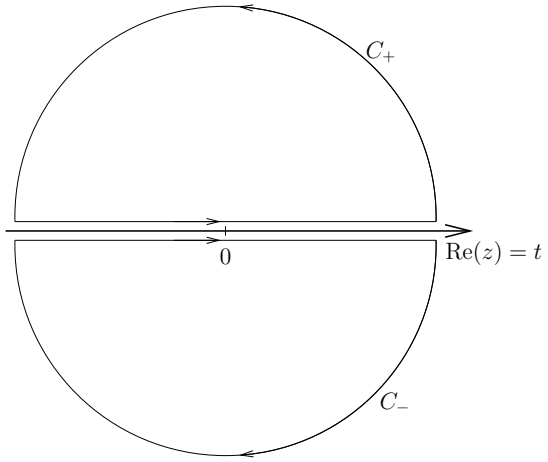


Als Halbwertsbreite ist definiert: $f(t_H) = \frac{1}{2} f_{\max} = \frac{1}{2a^2} \quad \curvearrowright \quad t_H = \pm a$

$$\mathcal{F}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega t}}{t^2 + a^2} \, \mathrm{d}t$$

Die Auswertung des Integrals erfolgt mit dem Residuensatz. Dabei betrachten wir t als Realteil der komplexen Variable z.

Wir bilden die Integrale über die geschlossenen Kurven C_+ und C_- und blähen die Halbkreise bis ins Unendliche auf. Die Basislinien auf der reellen Achse erstecken sich dann von $-\infty$ bis $+\infty$. Man richtet die Bedingungen nach Möglichkeit so ein, daß das Integral über den Halbkreis im Unendlichen verschwindet. Damit geht das Integral über die geschlossene Kurve C_+



oder C_- in $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t$ über. Das Integral über die geschlossene Kurve lässt sich nun einfach mit dem Residuensatz ausrechnen. In diesem Fall bedeutet das konkret: $t \to z = \underbrace{\mathrm{Re}(z)}_{t} + i\mathrm{Im}(z)$

$$\frac{e^{-i\omega z}}{z^2+a^2} = \frac{e^{-i\omega \mathrm{Re}(z)}}{z^2+a^2} e^{\omega \mathrm{Im}(z)}$$

$$\omega > 0: \ \frac{e^{\omega \mathrm{Im}(z)}}{z^2+a^2} \longrightarrow 0 \quad \text{für } \mathrm{Im}(z) < 0, \text{ d.h. auf } C_-$$
$$\omega < 0: \ \frac{e^{\omega \mathrm{Im}(z)}}{z^2+a^2} \longrightarrow 0 \quad \text{für } \mathrm{Im}(z) > 0, \text{ d.h. auf } C_+$$

Fall $\omega < 0$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega z}}{z^2+a^2}\,\mathrm{d}z = \int_{C_+} \frac{e^{-i\omega z}}{z^2+a^2}\,\mathrm{d}z$$

Fall $\omega > 0$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega z}}{z^2+a^2}\,\mathrm{d}z = \int_{C_-^*} \frac{e^{-i\omega z}}{z^2+a^2}\,\mathrm{d}z = -\int_{C_-} \frac{e^{-i\omega z}}{z^2+a^2}\,\mathrm{d}z$$

Dabei steht C_-^* für eine Integration über den Weg C_-, aber mit umgekehrtem Umlaufsinn.

Wir bestimmen jetzt die Pole innerhalb von C_+ und C_-:

$$\frac{e^{-i\omega z}}{z^2+a^2} = \frac{e^{-i\omega z}}{(z+i|a|)(z-i|a|)}$$

$\curvearrowright$ Pol in C_+ bei $z_+ = i|a|$ und Pol in C_- bei $z_- = -i|a|$

Die Residuen an den Polen sind:

$$\begin{aligned} R(z_+) &= \lim_{z\to z_+}(z-z_+)\cdot\frac{e^{-i\omega z}}{z^2+a^2} \\ &= \lim_{z\to i|a|}(z-i|a|)\cdot\frac{e^{-i\omega z}}{z^2+a^2} \\ &= \frac{1}{2i|a|}e^{\omega|a|} \\ R(z_-) &= \lim_{z\to z_-}(z-z_-)\cdot\frac{e^{-i\omega z}}{z^2+a^2} \\ &= \frac{1}{-2i|a|}e^{-\omega|a|} \end{aligned}$$

Damit ergeben die Integrale:

$$\omega<0: \quad \int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-i\omega z}}{z^2+a^2}\,\mathrm{d}z = \int_{C_+}\frac{e^{-i\omega z}}{z^2+a^2}\,\mathrm{d}z = 2\pi i\mathrm{Re}\,(z_+) = \frac{\pi}{|a|}e^{\omega|a|}$$

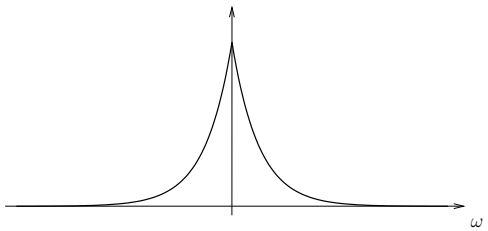
$$\omega>0: \quad \int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-i\omega z}}{z^2+a^2}\,\mathrm{d}z = -\int_{C_-}\frac{e^{-i\omega z}}{z^2+a^2}\,\mathrm{d}z = -2\pi i\mathrm{Re}\,(z_-) = \frac{\pi}{|a|}e^{-\omega|a|}$$

Zusammengefaßt ergibt sich:

$$\forall\,\omega: \quad \int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-i\omega z}}{z^2+a^2}\,\mathrm{d}z = \frac{\pi}{|a|}e^{-|\omega a|}$$

und somit

$$\mathcal{F}(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{|a|}e^{-|\omega a|}$$



Halbwertsbreite der Transformierten: $e^{-|\omega_H a|} = \frac{1}{2} \quad \curvearrowright \; |\omega_H| = \frac{\ln 2}{|a|}$

Die charakteristischen Breiten von f und $\mathcal{F}$ sind also genau umgekehrt proportional zueinander. Zur Überprüfung des Ergebnisses führen wir auch noch die Rücktransformation

durch:

$$\begin{aligned}
f(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(\omega) e^{i\omega t}\,\mathrm{d}\omega \\
f(t) &= \frac{1}{2|a|} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|\omega a|+i\omega t}\,\mathrm{d}\omega \\
&= \frac{1}{2|a|} \left\{ \int_{-\infty}^{0} e^{\omega|a|+i\omega t}\,\mathrm{d}\omega + \int_{0}^{\infty} e^{-\omega|a|+i\omega t}\,\mathrm{d}\omega \right\} \\
&= \frac{1}{2|a|} \left\{ \int_{0}^{\infty} e^{-\omega|a|-i\omega t}\,\mathrm{d}\omega + \int_{0}^{\infty} e^{-\omega|a|+i\omega t}\,\mathrm{d}\omega \right\} \\
&= \frac{1}{2|a|} \left\{ \frac{0-1}{-|a|-it} + \frac{0-1}{-|a|+it} \right\} \\
&= \frac{1}{2|a|} \frac{|a|-it+|a|+it}{(|a|+it)(|a|-it)} = \frac{1}{a^2+t^2} = f(t)
\end{aligned}$$

Weitere Beispiele: www.jhu.edu/%FEsignals/ctftprops/indexCTFTprops.htm

- Fouriertransformation von Ableitungen $\mathrm{d}_t f(t)$

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\left(\mathrm{d}_t f(t)\right) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\mathrm{d}_t f(t)}_{u'} \underbrace{e^{-i\omega t}}_{v}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \underbrace{f(t)e^{-i\omega t}\big|_{-\infty}^{\infty}}_{=0} - \int_{-\infty}^{\infty} f(t)(-i\omega)e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t \right\} \\
&= i\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t \\
&= i\omega\mathcal{F}(\omega)
\end{aligned}$$

$$\curvearrowright \quad \hat{T}_F\left(\mathrm{d}_t f\right) = i\omega\mathcal{F} \tag{8.7}$$

Die Differentiation geht im Fourierraum in eine Multiplikation über.

- Fouriertransformation der Faltung

Seien $f(t)$ und $g(t)$ Funktionen. Dann ist die Faltung $f * g$ von f und g definiert durch

$$\left(f * g\right)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau \tag{8.8}$$

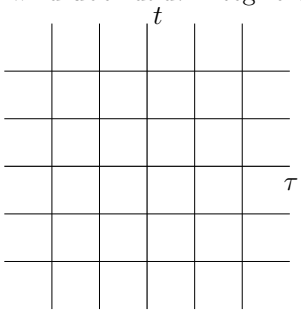
Der Faltungssatz besagt, daß eine Faltung bei einer Fouriertransformation in eine Multiplikation der Fourier-Transformierten der einzelnen Funktionen übergeht:

$$\hat{T}_F\left(f * g\right) = \sqrt{2\pi}\hat{T}_F\left(f\right) \cdot \hat{T}_F\left(g\right) \tag{8.9}$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (f * g)(t) e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau \right\} e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(t-\tau)\, \tau e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\tau \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(t-\tau)\, e^{-i\omega(t-\tau)}\, e^{-i\omega\tau}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\tau \\
&\qquad \text{Substitution } t' = t-\tau,\ \mathrm{d}t' = \mathrm{d}t \\
&= \sqrt{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\, e^{-i\omega\tau}\,\mathrm{d}\tau \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(t')\, e^{-i\omega t'}\,\mathrm{d}t' \\
&= \sqrt{2\pi}\, \mathcal{F}(\omega) \cdot \mathcal{G}(\omega)
\end{aligned}$$

Es folgen noch einige Details zur Subtitution $t' = t - \tau$ und deren Auswirkung auf die Integrationsgrenzen. Zunächst wird über $\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\tau$ integriert, also über die t-τ-Ebene.



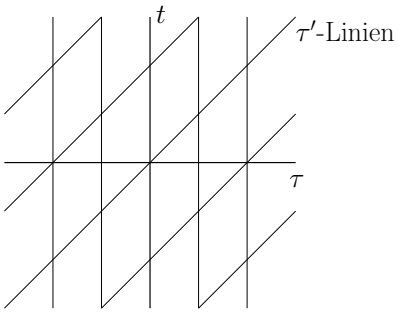
Wir führen eine Koordinatentransformation in der $t-\tau$-Ebene durch:

$$\begin{aligned}
t' &= t - \tau \\
\tau' &= \tau
\end{aligned}$$

Die Jacobi-Determinante J dieser Koordintentransformation berechnet sich zu

$$J = \det \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \quad \curvearrowright \quad \mathrm{d}t'\,\mathrm{d}\tau' = \mathrm{d}t\,\mathrm{d}\tau$$

Die neuen t', τ' Koordinatenlinien liegen anders als die t, τ Koordinatenlinien:



Damit auch bei der $\mathrm{d}\tau'\,\mathrm{d}t'$-Integration die ganze Ebene überdeckt wird, müssen offensichtlich auch die neuen Parameter τ', t' jeweils von $-\infty$ bis ∞ laufen.

- Fouriertransformation und δ-Funktion

  Wir erinnern uns an die Definition der δ-Funktion:

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases} \tag{8.10}$$

  mit

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(t)\,\mathrm{d}t = 1 \tag{8.11}$$

  und

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-\tau)\,\mathrm{d}t = f(\tau) \tag{8.12}$$

  Wir betrachten jetzt die Fourier-Transformation der Funktion $f(t)$ und setzen die Hin- und Rücktransformation ineinander ein:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t \\ f(\tau) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(\omega) e^{i\omega\tau}\,\mathrm{d}\omega \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \curvearrowright f(\tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t\, e^{i\omega\tau}\,\mathrm{d}\omega \\ f(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(t-\tau)}\,\mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

  Der Vergleich mit (8.12) liefert

$$\delta(t-\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(t-\tau)}\,\mathrm{d}\omega \tag{8.13}$$

  Dies ist die sogenannte Fourier-Darstellung der δ-Funktion.

  Anschaulich ist dies folgendermassen zu erklären:

$$\begin{aligned} \delta(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \cos\omega t\;\mathrm{d}\omega - i\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sin\omega t\;\mathrm{d}\omega \end{aligned}$$

  Das Integral über die Sinusfunktion verschwindet, da ein antisymmetrischer Integrand über ein symmetrisches Intervall integriert wird. Die Cosinusfunktion ist für $t \neq 0$ periodisch in ω und das Integral verschwindet. Für $t = 0$ ist der Integrand eins ($\cos 0 = 1$) und das Integral wird unendlich.

Die Fourier-Transformierte der δ-Funktion berechnet sich zu

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-i\omega t} \, \mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \tag{8.14}$$

Wir bestimmen jetzt durch Rcktransformation, welche Funktion $f(t)$ als Fouriertransformierte $\mathcal{F}(\omega) = \delta(\omega)$ ergibt:

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega) e^{i\omega t} \, \mathrm{d}\omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}. \tag{8.15}$$

Somit hat eine konstante Funktion als Fourier-Transformierte die δ-Funktion. Auch die Fouriertransformierte einer harmonischen Schwingung $e^{i\omega_0 t}$ ergibt eine δ-Funktion:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega_0 t} \, e^{-i\omega t} \mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\omega-\omega_0)t} \, \mathrm{d}t = \sqrt{2\pi}\delta(\omega - \omega_0) \tag{8.16}$$

- Interpretation der Fouriertransformation

  t sei ein Parameter mit der Dimension einer Zeit: $[t] = \mathrm{s}$. Daraus folgt, daß ω die Einheit $[\omega] = \frac{1}{\mathrm{s}}$ und so die Bedeutung einer Frequenz hat.

  $\mathcal{F}(\omega)$ ist also als Frequenzspektum von $f(t)$ interpretierbar. $f(t)$ sei eine harmonische Schwingung mit der Frequenz $\omega_0/2\pi$ und zeitlich nicht begrenzt:

  $$\begin{aligned} & f(t) &=& \; e^{i\omega_0 t} \\ \curvearrowright \quad & \mathcal{F}(\omega) &=& \; \sqrt{2\pi}\delta(\omega - \omega_0) \end{aligned}$$

  $f(t)$ hat ein „Monochromatisches Spektrum“.

  $f(t)$ sei jetzt einen Überlagerung von harmonischen Schwingungen verschiedener Frequenzen ω_n:

  $$f(t) = \sum_n A_n e^{i\omega_n t} \tag{8.17}$$

  Dabei ist ω_n die Frequenz der n-ten Partialschwingung. Dann folgt

  $$\mathcal{F}(\omega) = \sum_n A_n \sqrt{2\pi}\delta(\omega - \omega_n). \tag{8.18}$$

  $\mathcal{F}(\omega)$ repräsentiert gerade die spektralen Anteile.

  Eine „Hardware“-Realisierung einer solchen Fourier-Transformation erfolgt z.B. in einem Prisma. Ein Prisma zerlegt Licht nach Frequenzteilen, dabei wird blau (HF) stärker gebrochen als rot (NF).

3 Laplace-Transformation

Eine Integraltransformation $\hat{T}_L$ heißt Laplace-Transformation, wenn gilt:

- $\mathcal{K}(\omega, t) = e^{-\omega t}$; $\quad t \in \mathbb{R},\ \omega \in \mathbb{C}$
- $a = 0$

- $b = \infty$

Die Transformation $\hat{T}_L$: $\hat{T}_L f = \mathcal{F}$ ist folgendermassen definiert:

$$\mathcal{F}(\omega) = \int_0^\infty f(t) e^{-\omega t} \, \mathrm{d}t \tag{8.19}$$

Dabei muß Re(ω) hinreichend groß gewählt werden, damit das Integral existiert.

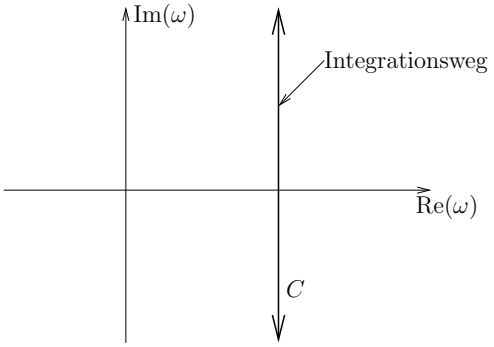
Da in der Transformation nur $t \geq 0$ betrachtet wird, definiert man $f(t) = 0$ für $t < 0$.

Es existiert eine Umkehrtransformation $\hat{T}_L^{-1}$: $f = \hat{T}_L^{-1} F$.

Zur Darstellung von $\hat{T}_L^{-1}$ sind verschiedene Formen möglich, z.B. das Bromwich-Integral:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C-i\infty}^{C+i\infty} \mathcal{F}(\omega) e^{\omega t} \, \mathrm{d}\omega \tag{8.20}$$

Dabei ist $t > 0$ und C hinreichend groß zu wählen, um die Konvergenz des Integrals zu sichern.



- Bespiel: $f(t) = {}^{-at}$, $a > 0$

$$\mathcal{F}(\omega) = \int_0^\infty e^{-at-\omega t} \, \mathrm{d}t \quad \curvearrowright \quad \mathrm{Re}(\omega + a) > 0$$

$$\mathcal{F}(\omega) = -\frac{e^{-(\omega+a)t}\big|_0^\infty}{\omega + a} = \frac{1}{\omega + a}$$

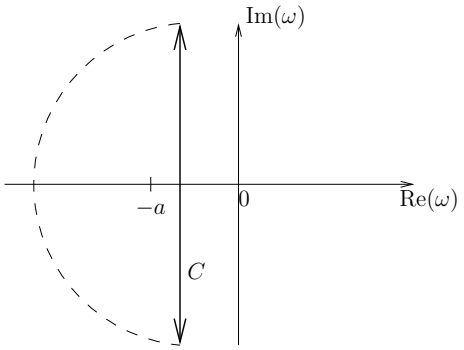
$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\cdot}^{\cdot} \frac{e^{\omega t}}{\omega + a} \, \mathrm{d}\omega \, , \quad \mathrm{Re}(\omega + a) > 0, \; \mathrm{Re}(\omega) > -a$$

Der Integrationsweg muß dort entlang laufen, wo das Integral existiert, also muss $C > -a$ gelten.

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C-i\infty}^{C+i\infty} \frac{e^{\omega t}}{\omega + a} \, \mathrm{d}\omega \, , \quad C > -a$$

Die Auswertung des Integrals erfolgt über den Residuensatz. Es gibt einen Pol bei $\omega = -a$. Das zugehörige Residuum ist:

$$R(\omega = -a) = \lim_{\omega \to -a} \left[(\omega - (-a)) \frac{e^{\omega t}}{\omega + a} \right] = e^{-at}$$



Auf dem Kreisbogen verschwindet das Integral beim Aufblähen ins Unendliche, da der Integrand für $\mathrm{Re}(\omega) < 0$ verschwindet.

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi i} \cdot 2\pi i \cdot R(\omega = -a) \\ f(t) &= e^{-at} \end{aligned}$$

- Laplace-Transformierte der Ableitung $\mathrm{d}_t f$

$$\int_0^\infty \underbrace{\mathrm{d}_t f(t)}_{u'} \underbrace{e^{-\omega t}}_{v} \,\mathrm{d}t = f(t)e^{-\omega t}\big|_0^\infty + \omega \int_0^\infty f(t)e^{-\omega t}\,\mathrm{d}t = -f(0) + \omega\mathcal{F}(\omega) \tag{8.21}$$

Bei höheren Ableitungen ergibt sich:

$$\int_0^\infty \mathrm{d}_t^2 f(t)e^{-\omega t}\,\mathrm{d}t = \omega^2\mathcal{F}(\omega) - \omega f(0) - \mathrm{d}_t f(0) \tag{8.22}$$

usw.

- Interpretation der Laplace-Tansformation

  Die Laplace Transformation ist analog zur Fourier-Transformation zu interpretieren. Allerdings unterscheiden sich die Anwendungsgebiete. Die Laplace-transformation wird bei Einschaltprozessen bevorzugt, wenn also gilt

$$f(t < 0) = 0.$$

  Hier sei $t = 0$ der Schaltzeitpunkt.

  Wenn t eine Ortskoordinate darstellt ($t \to x$), tritt $t = 0$ bzw. $x = 0$ als Rand eines bestimmten Problems auf. Randwertprobleme erfordern deshalb die Anwendung von Laplace-Transormationen anstatt von Fourier-Transformationen.

Kapitel 9

Differentialformen

1 Motivation

Alle bisher diskutierten Methoden der Mathematischen Physik sind bereits seit deutlich mehr als 100 Jahren bekannt. Der jetzt in Ansätzen einzuführende Differentialformen-Kalkül ist etwas jünger. Er wurde zuerst von Elie Joseph Cartan (1869-1951) eingeführt. Er wird deshalb auch Cartan-Differentialformen-Kalkül genannt.

Die übliche und häufig in der Physik gebräuchliche Vektorrechnung enthält unsystematische Kapitel sowie Konstruktionen, die auf den 3-dimensionalen Raum fixiert sind. Zwei Beispiele sind das Vektroprodukt und die Rotation.

Das Vektorprodukt wurde durch Formel (4.41) definiert:

$$\underline{u} \times \underline{v} = \sqrt{g}\, \varepsilon_{abc} \underline{b}^a u^b v^c$$

Die Summenkonvention erzwingt die Summation über a, b, c von 1 bis 3.

Wir versuchen nun eine Verallgemeinerung auf den 4-dimensionalen Raum. ε_{ijkl} läßt sich bilden, aber für das Vektorprodukt wird eine Größe ε_{ijk} benötigt, die jedoch keinen Sinn ergibt, wenn i, j, k von 1 bis 4 laufen. Das Vektorprodukt ist somit nicht verallgemeinerbar.

Die Rotation wurde durch Gleichung (3.27) in kartesischen Koordinaten definiert:

$$\partial_{\underline{r}} \times \underline{u} = \begin{pmatrix} \partial_{x^2} u^3 - \partial_{x^3} u^2 \\ \partial_{x^3} u^1 - \partial_{x^1} u^3 \\ \partial_{x^1} u^2 - \partial_{x^2} u^1 \end{pmatrix}$$

Eine Erweiterung auf 4 Dimensionen ist mit dieser Konstruktion ebenfalls nicht möglich.

Ganz anders liegt die Situation beim Skalarprodukt. Eine Verallgemeinerung auf beliebige Dimensionen ist problemlos:

$$\underline{u}\,\underline{v} = \underbrace{\underbrace{u^1 v_1 + u^2 v_2 + u^3 v_3}_{3-dim} + u^4 v_4 + \ldots}_{4-dim}$$

Eine weitere sehr wichtige Motivation für den Differentialformen-Kalkül ergibt sich aus den Integralsätzen (3.51), (3.52), (3.64). Äußerlich haben sie recht verschiedene Formen. Einen gemeinsamen Hintergrund vermuten wir bereits, denn in allen Fällen wird ein Integral über ein Gebiet mit einem Integral über den Rand dieses Gebietes verknüpft.

2 Äußeres Produkt

- Um Verallgemeinerungen z.B. des Vektorproduktes, der Rotation oder der Integralsätze vornehmen zu können, ist die Einführung des Äußeren Produktes (auch genannt Dachprodukt, Keilprodukt, Wedge) notwendig. Dazu betrachten wir einen Vektorraum L der Dimension n über dem Körper der reellen Zahlen $\mathbb{R}$. Der Satz von Vektoren

$$\{\sigma_i\}_{i=1}^n \tag{9.1}$$

sei eine Basis in L. Die σ_i werden wir nicht unterstreichen, da sie im allgemeinen recht allgemeine Objekte und nicht immer mit einem n-Tupel identifizierbar sind.

Das allgemeine Element α aus L läßt sich dann in der Form

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} a^i \sigma_i \tag{9.2}$$

mit entsprechenden Komponenten a^i darstellen. Wir definieren nun den Produktraum $L \wedge L$ durch Produktbildung des Vektorraumes L mit sich selbst. Dazu definiert man das Äußere Produkt

$$\alpha \wedge \beta \ \in \ L \wedge L\,; \quad \alpha, \beta, \gamma, \ldots \in L \qquad \text{(sprich: } \alpha \text{ wedge } \beta\text{)} \tag{9.3}$$

mit den fogenden Eigenschaften:

1. Linearität

$$\alpha \wedge (\beta + \gamma) \ = \ \alpha \wedge \beta + \alpha \wedge \gamma \tag{9.4}$$

$$(r\alpha) \wedge \beta \ = \ r\,(\alpha \wedge \beta)\ , \quad r \in \mathbb{R} \tag{9.5}$$

2. Antivertauschbarkeit

$$\alpha \wedge \beta = -\beta \wedge \alpha \tag{9.6}$$

- Folgerungen:
  - $\alpha \wedge \alpha = 0$
  - $(\alpha + \beta) \wedge \gamma = \alpha \wedge \gamma + \beta \wedge \gamma$
  - $\alpha \wedge (r\beta) = r\,(\alpha \wedge \beta)$
  - Diese Eigenschaften gelten insbesondere für Basisvektoren, also gilt

$$\sigma_i \wedge \sigma_j = -\sigma_j \wedge \sigma_i \tag{9.7}$$

- Achtung: $\alpha \wedge \beta \notin L$

  Beim Vektorprodukt gilt zwar ebenfalls

$$\underline{u}, \underline{v} \ \in \ \mathbb{R}^3\ , \quad \underline{u} \times \underline{v} = -\underline{v} \times \underline{u},$$

  aber hier ist auch $\underline{u} \times \underline{v} \ \in \ \mathbb{R}^3$.

- Mehrfache äußere Produktbildung

  Die Produktbildung ist erweiterbar auf mehrfache Äußere Produkte:

$$\alpha \wedge \beta \wedge \gamma \ \in \ L \wedge L \wedge L \equiv \wedge^3 L \tag{9.8}$$

  bzw.

$$\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \ldots \wedge \alpha_p \ \in \ \wedge^p L. \tag{9.9}$$

Die Eigenschaften der mehrfachen Produkte lassen sich auf die obigen Eigenschaften des einfachen Produkts zurückführen:

$$\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_i \wedge \alpha_j \wedge \ldots \wedge \alpha_p = -\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_j \wedge \alpha_i \wedge \ldots \wedge \alpha_p \tag{9.10}$$

Alles, was für allgemeine Elemente gilt, gilt insbesondere auch für Basiselemente:

$$\sigma_1 \wedge \ldots \wedge \sigma_i \wedge \sigma_j \wedge \ldots \wedge \sigma_p = -\sigma_1 \wedge \ldots \wedge \sigma_j \wedge \sigma_i \wedge \ldots \wedge \sigma_p \tag{9.11}$$

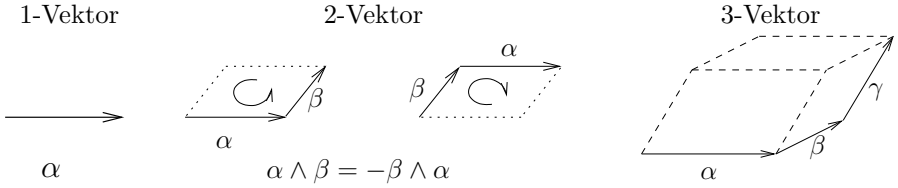
Auffällig ist die Analogie zum Levi-Civita-Symbol. Sei n=3 und

$$\sigma_i \wedge \sigma_j \wedge \sigma_k \ \in \ \wedge^3 L\,; \quad i,j,k = 1,\ldots,3.$$

Dann kann man offensichtlich auch schreiben

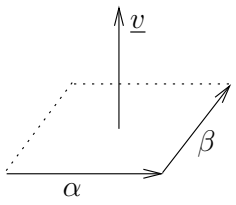
$$\sigma_i \wedge \sigma_j \wedge \sigma_k = \varepsilon_{ijk}\, \sigma_1 \wedge \sigma_2 \wedge \sigma_3. \tag{9.12}$$

- Bezeichnungen:
  - α wird als Vektor, genauer 1-Vektor bezeichnet.
  - $\alpha \wedge \beta$ ist ein 2-Vektor.
  - $\alpha \wedge \beta \wedge \gamma$ ist ein 3-Vektor.
  - $\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_p$ ein p-Vektor.
- Geometrische Vorstellung zum Äußeren Produkt und zum p-Vektor:



„Pfeil“ „Flächenstück mit Umlaufsinn“ „Orientiertes Parallelepiped“

Im 3-dimensionalen Raum existiert neben dem 2-Vektor $\alpha \wedge \beta$ das Vektorprodukt $\alpha \times \beta$. Das Vektorprodukt $\alpha \times \beta$ ist aber ein 1-Vektor („Pfeil“).



$$\underline{v} = \alpha \times \beta$$

$\underline{v}$ 1-Vektor

Im 3-dimensionalen Raum ist der Übergang vom 2-Vektor $\alpha \wedge \beta$ zum 1-Vektor $\alpha \times \beta$ der Übergang zum sogenannten dualen (komplementären) Gebilde. Da ein 3-dimensionaler Raum von den drei 1-Vektoren α, β, $\alpha \times \beta$ voll aufgespannt wird, hat die 3-dimensionale Physik 2-Vektoren und 3-Vektoren nicht weiter beachtet.

- Basiselemente von $\wedge^p L$

  Die Basiselemente werden aus den Basiselementen von L konstruiert. Sei L n-dimensional. L habe also die Basis $\{\sigma_i\}_{i=1}^n$.

Die Basiselemente von $\wedge^2 L$ sind dann

$$\sigma_i \wedge \sigma_j \ , \quad i \neq j \text{ und } i < j \tag{9.13}$$

Die Beschränkung auf $i < j$ ist erforderlich,da $\sigma_j \wedge \sigma_i = -1 \cdot \sigma_i \wedge \sigma_j$.
Ein allgemeiner 2-Vektor aus $\wedge^2 L$ ist dann

$$\alpha \wedge \beta = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} a^{ij} \sigma_i \wedge \sigma_j \tag{9.14}$$

Es gibt insgesamt soviele Basiselemente, wie unabhängige Komponenten in einer antisymmetrischen Matrix:

$$\frac{n^2 - n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} = \binom{n}{2} \tag{9.15}$$

Die Basiselemente von $\wedge^p L$ sind dann

$$\sigma_{i_1} \wedge \sigma_{i_2} \wedge \ldots \wedge \sigma_{i_p} \text{ mit } i_1 < i_2 < \cdots < i_p. \tag{9.16}$$

Es gibt somit

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} \tag{9.17}$$

Basiselemente.
Wenn $p = n$ ist, gibt es nur ein Basiselement

$$\sigma_1 \wedge \sigma_2 \wedge \ldots \wedge \sigma_n. \tag{9.18}$$

Der Fall $p > n$ ist nicht möglich, da dann mindestens ein Basisvektor doppelt vorkommen würde und wegen (9.6) ergäbe sich null.

- Beispiel: $L = \mathbb{R}^3$
  - $\wedge^1 L = L$: $\sigma_1,\ \sigma_2,\ \sigma_3$ $(\hat{=}\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$
  - $\wedge^2 L = L \wedge L$: $\sigma_1 \wedge \sigma_2,\ \sigma_2 \wedge \sigma_3,\ \sigma_1 \wedge \sigma_3$
  - $\wedge^3 L = L \wedge L \wedge L$: $\sigma_1 \wedge \sigma_2 \wedge \sigma_3$
  - Konstruktion eines Elementes $\gamma = \alpha \wedge \beta$ von $\wedge^2 L$, wenn α und β beliebige Elemente von L sind:

$$\begin{aligned} \alpha &= \sum_{i=1}^{3} a^i \sigma_i \\ \beta &= \sum_{i=1}^{3} b^i \sigma_i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma \equiv \alpha \wedge \beta &= a^1 b^2\, \sigma_1 \wedge \sigma_2 + a^2 b^1\, \sigma_2 \wedge \sigma_1 \\ &\quad + a^2 b^3\, \sigma_2 \wedge \sigma_3 + a^3 b^2\, \sigma_3 \wedge \sigma_2 \\ &\quad + a^3 b^1\, \sigma_3 \wedge \sigma_1 + a^1 b^3\, \sigma_1 \wedge \sigma_3 \\ &= \left(a^1 b^2 - a^2 b^1\right)\, \sigma_1 \wedge \sigma_2 \\ &\quad + \left(a^2 b^3 - a^3 b^2\right)\, \sigma_2 \wedge \sigma_3 \\ &\quad + \left(a^3 b^1 - a^1 b^3\right)\, \sigma_3 \wedge \sigma_1 \end{aligned}$$

Die Vorfaktoren sind offensichtlich die Komponenten des Vektorprodukts.

$$\curvearrowright \quad \gamma = c^{12}\, \sigma_1 \wedge \sigma_2 + c^{23}\, \sigma_2 \wedge \sigma_3 + c^{31}\, \sigma_3 \wedge \sigma_1$$

mit $c^{ij} = a^i b^j - a^j b^i = -c^{ji}$ (antisymmetrisch!)

– Konstuktion eines Elements $\delta = \alpha \wedge \gamma \in \wedge^3 L$, wenn $\alpha \in \wedge^1 L$ und $\gamma \in \wedge^2 L$ sind:

$$\begin{aligned} \alpha &= a^1\sigma_1 + a^2\sigma_2 + a^3\sigma_3 \\ \gamma &= c^{12}\,\sigma_1 \wedge \sigma_2 + c^{23}\,\sigma_2 \wedge \sigma_3 + c^{31}\,\sigma_3 \wedge \sigma_1 \end{aligned}$$

Wir benennen zunächst einige Indizes um:

$$c^{12} = c_3\,,\; c^{23} = c_1\,,\; c^{31} = c_2$$

$$\curvearrowright \quad \gamma = c_1\,\sigma_2 \wedge \sigma_3 + c_2\,\sigma_3 \wedge \sigma_1 + c_3\,\sigma_1 \wedge \sigma_2$$

$$\begin{aligned} \curvearrowright \quad \delta &\equiv \alpha \wedge \gamma \\ &= \left(a^1\sigma_1 + a^2\sigma_2 + a^3\sigma_3\right) \wedge (c_1\,\sigma_2 \wedge \sigma_3 + c_2\,\sigma_3 \wedge \sigma_1 + c_3\,\sigma_1 \wedge \sigma_2) \\ &= a^1c_1\,\sigma_1 \wedge \sigma_2 \wedge \sigma_3 + a^2c_2\,\sigma_2 \wedge \sigma_3 \wedge \sigma_1 + a^2c_3\,\sigma_3 \wedge \sigma_1 \wedge \sigma_2 \\ \delta &= \left(a^1c_1 + a^2c_2 + a^3c_3\right)\,\sigma_1 \wedge \sigma_2 \wedge \sigma_3 \end{aligned}$$

Der Vorfaktor ist offensichtlich das Skalarprodukt.

Wir sehen, daß das Äußere Produkt die herkömmlichen Strukturen durchaus enthält.

- Lineare Basistransformationen

  L sei n-dimensional mit der Basis $\{\sigma_i\}$. Wir führen eine lineare Transformation $\hat{A}$ in L durch und untersuchen die Konsequenzen für den Produktraum:

$$\hat{A}: \quad L \to L\,, \qquad \{\sigma_i\} \to \{\sigma_i{}'\}\,, \qquad \sigma_i{}' = \sum_{j=1}^{n} A_i^j \sigma_j \tag{9.19}$$

  Basiselement in $\wedge^n L$:

  Es gibt nur ein Basiselement in $\wedge^n L$, deshalb muß gelten

$$\sigma_1{}' \wedge \sigma_2{}' \wedge \ldots \wedge \sigma_n{}' \quad \propto \quad \sigma_1 \wedge \sigma_2 \wedge \ldots \wedge \sigma_n. \tag{9.20}$$

  Den Proportionalitätsfaktor berechnen wir durch Einsetzen von (9.19) in den linken Term von (9.20) und erhalten

$$\sigma_1{}' \wedge \sigma_2{}' \wedge \ldots \wedge \sigma_n{}' = \sum_{i_1,i_2,\ldots,i_n} A_1^{i_1} A_2^{i_2} \ldots A_n^{i_n}.\, \sigma_{i_1} \wedge \sigma_{i_2} \wedge \ldots \wedge \sigma_{i_n}$$

  Nun gilt wegen (9.12)

$$\sigma_{i_1} \wedge \sigma_{i_2} \wedge \ldots \wedge \sigma_{i_n} = \varepsilon_{i_1 i_2 \ldots i_n}\,\sigma_1 \wedge \sigma_2 \wedge \ldots \wedge \sigma_n$$

  wobei $\varepsilon_{i_1 i_2 \ldots}$ das Levi-Civita-Symbol in n Dimensionen darstellt. Somit folgt

$$\sigma_1{}' \wedge \sigma_2{}' \wedge \ldots \wedge \sigma_n{}' = \underbrace{\sum_{i_1,\ldots,i_n} A_1^{i_1} A_2^{i_2} \ldots A_n^{i_n}\,\varepsilon_{i_1 i_2 \ldots i_n}}_{=\det(A)}\,\sigma_1 \wedge \sigma_2 \wedge \ldots \wedge \sigma_n$$

  Unter Anwendung der auf n Dimensionen verallgemeinerten Beziehung (4.35) ergibt sich

$$\sigma_1{}' \wedge \sigma_2{}' \wedge \ldots \wedge \sigma_n{}' = \det(A)\,\sigma_1 \wedge \sigma_2 \wedge \ldots \wedge \sigma_n \tag{9.21}$$

3 Äußere Ableitung

Nach der Einführung des Äußeren Produktes im vorangegangenen Abschnitt wollen wir nun die Äußere Ableitung einführen. Analog zum Äußeren Produkt, daß das Skalarprodukt und Vektorprodukt enthält, haben wir jetzt die Erwartung, daß die Äußere Ableitung die herkömmlichen Differentialoperatoren Gradient, Rotation und Divergenz verallgemeinert.

Dazu betrachten wir einen n-dimensionalen Raum, z.B. den n-dimensionalen „Ortsraum“. In diesem Raum sei ein beliebiges Koordinatensystem aufgespannt, etwa ein kartesisches oder auch ein krummliniges. In einem Punkt P mit den Koordinaten x_1, …, x_n betrachten wir jetzt Objekte (Vektoren), die einen Vektorraum bilden mögen, z.B. die möglichen elektrischen Felder in P. Als Basiselemente σ_i können in diesem Vektorraum die Koordinatendifferentiale $\mathrm{d}x_i$ benutzt werden:

$$\sigma_i = \mathrm{d}x_i \tag{9.22}$$

Nun definieren wir die sogenannten Differentialformen oder kurz auch Formen genannt:

- 1-Form:
$$\omega = \sum_{i=1}^{n} a_i \,\mathrm{d}x_i \tag{9.23}$$
- 2-Form:
$$\omega = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \,\mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j \tag{9.24}$$
- p-Form:
$$\omega = \sum_{i_1,i_2,\ldots,i_p=1}^{n} a_{i_1\ldots i_p} \,\mathrm{d}x_{i_1} \wedge \mathrm{d}x_{i_2} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_{i_p} \tag{9.25}$$

Der Einfachheit halber sind alle Indizes unten geschrieben.Die Eigenschaften der p-Vektoren übertragen sich auf p-Formen. Die Konstruktion gilt zunächst nur für einen Punkt P.Wenn P in den verschiedenen Punkten des Raumes betrachtet wird, werden die a_i, a_{ij}, …, $a_{i_1\ldots i_p}$ ortsabhängig:

$$a_i(\underline{x}),\ a_{ij}(\underline{x}),\ \ldots,\ a_{i_1\ldots i_p}(\underline{x}) \tag{9.26}$$

wobei $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_n)$.

Die Definition der Formen läßt sich ohne Schwierigkeit bis zu $p = n$ fortsetzen. Sogar $p = 0$ ist geradeaus möglich: Eine 0-Form ist dann eben ein Skalar.

Im $\mathbb{R}^3$ können wir die soeben eingeführten Formen recht leicht interpretieren:

- 0-Form:
$$\omega(\underline{x}) = a(\underline{x})\ , \quad a \text{ skalare Funktion} \tag{9.27}$$
- 1-Form:
$$\omega(\underline{x}) = \sum_{i=1}^{n} a_i(\underline{x}) \,\mathrm{d}x_i\ , \quad (a_1(\underline{x}), a_2(\underline{x}), a_3(\underline{x})) \text{ Vektorfeld} \tag{9.28}$$
- 2-Form:
$$\omega(\underline{x}) = c_1(\underline{x}) \,\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 + c_2(\underline{x}) \,\mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_1 + c_3(\underline{x}) \,\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \tag{9.29}$$
Die 2-Form entspricht einem orientierten Flächenelement.

Wir führen nun die Mengen $F^p(U)$ ein. Alle glatten p-Formen (p-Differentialformen) über einem Gebiet $U \subset \mathbb{R}^n$ werden in $F^p(U)$ zusammengefasst. Diese Mengen haben dann folgende Bedeutung:

- $F^0(U)$: Menge der 0-Formen auf $U \mathrel{\hat{=}}$ Menge der differenziarbaren Funktionen
- $F^1(U)$: Menge der 1-Formen auf $U \mathrel{\hat{=}}$ Menge der differenziarbaren Vektorfelder
- u.s.w.

Wir erinnern uns an das totale Differential einer Funktion $f(\underline{x})$ im $\mathbb{R}^3$:

$$\mathrm{d}f = \partial_{x_1} f \cdot \mathrm{d}x_1 + \partial_{x_2} f \cdot \mathrm{d}x_2 + \partial_{x_3} f \cdot \mathrm{d}x_3.$$

Wir können dann folgende Zuordnungen treffen:

- $f \in F^0$
- $\mathrm{d}f \in F^1$

Das totale Differential ist ein Übergang von $f \in F^0$ nach $\mathrm{d}f \in F^1$

Der Operator „d“ wird jetzt so verallgemeinert, daß p-Formen in $(p+1)$-Formen übergehen. Dies führt auf die Definition der Äußeren Ableitung d:

- α, α_1, α_2 seien p_α-Formen
- β sei p_β-Form
- $\mathrm{d}: \quad F^p(U) \to F^{p+1}(U)$
- Für d gilt:
  1. Linearität
  $$\mathrm{d}(\alpha_1 + \alpha_2) = \mathrm{d}\alpha_1 + \mathrm{d}\alpha_2 \tag{9.30}$$
  2. Produktregel
  $$\mathrm{d}(\alpha \wedge \beta) = \mathrm{d}\alpha \wedge \beta + (-1)^{p_\alpha} \alpha \wedge \mathrm{d}\beta \tag{9.31}$$
  3. d ist totales Differential für Funktionen $f(\underline{x})$
  $$\mathrm{d}f = \sum_{i=1}^{n} \partial_{x_i} f \cdot \mathrm{d}x_i \tag{9.32}$$
  4.
  $$\mathrm{d}(\mathrm{d}\alpha) = 0 \tag{9.33}$$

Die Äußere Ableitung wird auch äußeres Differential genannt.

- Folgerungen
  - $\mathrm{d}(\mathrm{d}x_i) = 0$
  - $\mathrm{d}(\mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j) = \underbrace{\mathrm{d}(\mathrm{d}x_i)}_{=0} \wedge \mathrm{d}x_j - \mathrm{d}x_i \wedge \underbrace{\mathrm{d}(\mathrm{d}x_j)}_{=0} = 0$

    Das gilt analog für Basiselemente aus $\wedge^p L$, $p > 2$

– α sei 0-Form, $\beta = \mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_p$ sei p-Form

$$\begin{aligned} \curvearrowright \quad \alpha \wedge \beta &= \alpha\beta \quad \text{(nur so sinnvoll)} \\ \mathrm{d}(\alpha\beta) &= \mathrm{d}(\alpha \wedge \beta) \\ &= \mathrm{d}\alpha \wedge \beta + \alpha \underbrace{\mathrm{d}\beta}_{=0} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \partial_{x_i} \alpha \, \mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_p \\ &= \sum_{i \neq 1,\ldots,p}^{n} \partial_{x_i} \alpha \, \mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_p \end{aligned}$$

- Beispiel: $\mathbb{R}^2$

p	Basis	$\alpha \in F^p\left(U \subset \mathbb{R}^2\right)$	$\mathrm{d}\alpha$
0	1	$\alpha = a(\underline{x})$	$\mathrm{d}\alpha = \partial_{x_1} a \cdot \mathrm{d}x_1 + \partial_{x_2} a \cdot \mathrm{d}x_2$
1	$\mathrm{d}x_1$, $\mathrm{d}x_2$	$\alpha = a_1(\underline{x})\,\mathrm{d}x_1 + a_2(\underline{x})\,\mathrm{d}x_2$	$\mathrm{d}\alpha = \partial_{x_2} a_1 \, \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_1 + \partial_{x_1} a_2 \, \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 = (\partial_{x_1} a_2 - \partial_{x_2} a_1)\, \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2$
2	$\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2$	$\alpha = a_{12}(\underline{x})\,\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2$	$\mathrm{d}\alpha = 0$

- Beispiel: $\mathbb{R}^3$ $\left(U \subset \mathbb{R}^3\right)$

– $p = 0$:

$$\begin{aligned} \alpha &= a(\underline{x}) \\ \mathrm{d}\alpha &= \partial_{x_1} a \cdot \mathrm{d}x_1 + \partial_{x_2} a \cdot \mathrm{d}x_2 + \partial_{x_3} a \cdot \mathrm{d}x_3 \end{aligned}$$

Die Koeffizienten sind die Komponenten von $\partial_{\underline{r}}\, f$!!

– $p = 1$:

$$\begin{aligned} \alpha &= a_1(\underline{x})\,\mathrm{d}x_1 + a_2(\underline{x})\,\mathrm{d}x_2 + a_3(\underline{x})\,\mathrm{d}x_3 \\ \mathrm{d}\alpha &= \partial_{x_2} a_1 \, \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_1 + \partial_{x_3} a_1 \, \mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_1 \\ &\quad + \partial_{x_1} a_2 \, \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 + \partial_{x_3} a_2 \, \mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_2 \\ &\quad + \partial_{x_1} a_3 \, \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_3 + \partial_{x_2} a_3 \, \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 \end{aligned}$$

denn z.B.

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(a_1\,\mathrm{d}x_1) &= \mathrm{d}a_1 \wedge \mathrm{d}x_1 + a_1 \mathrm{d}\mathrm{d}x_1 \\ &= (\partial_{x_1} a_1 \, \mathrm{d}x_1 + \partial_{x_2} a_2 \, \mathrm{d}x_2 + \partial_{x_3} a_3 \, \mathrm{d}x_3) \wedge \mathrm{d}x_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\alpha &= (\partial_{x_2} a_3 - \partial_{x_3} a_2)\, \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 \\ &\quad + (\partial_{x_3} a_1 - \partial_{x_1} a_3)\, \mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_1 \\ &\quad + (\partial_{x_1} a_2 - \partial_{x_2} a_1)\, \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \end{aligned}$$

Die Koeffizienten sind die Komponenten von $\partial_{\underline{r}} \times \underline{a}$!!

– $p = 2$:

$$\begin{aligned}\alpha &= a_{23}(\underline{x})\,\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 \\ &\quad +a_{31}(\underline{x})\,\mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_1 \\ &\quad +a_{12}(\underline{x})\,\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \\ &\qquad\qquad \leftarrow \text{Umbenennung} \\ &= b_1(\underline{x})\,\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 \\ &\quad +b_2(\underline{x})\,\mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_1 \\ &\quad +b_3(\underline{x})\,\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\alpha &= \partial_{x_1} b_1\,\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 \\ &\quad +\partial_{x_2} b_2\,\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_1 \\ &\quad +\partial_{x_3} b_3\,\mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \\ &= (\partial_{x_1} b_1 + \partial_{x_2} b_2 + \partial_{x_2} b_2)\,\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3\end{aligned}$$

Die Koeffizienten sind die Divergenz eines Vektors $\underline{b}$!!

- Äußere Ableitung des totalen Differentials: $\mathrm{d}\,(\mathrm{d}f)$

$$\alpha = \mathrm{d}f = \partial_{x_1} f\,\mathrm{d}x_1 + \partial_{x_2} f\,\mathrm{d}x_2 + \partial_{x_3} f\,\mathrm{d}x_3 \tag{9.34}$$

zu verifizieren ist

$$\mathrm{d}\alpha = \mathrm{d}\,(\mathrm{d}f) = 0. \tag{9.35}$$

Die Rechnung ergibt

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\alpha &= \partial_{x_2}\partial_{x_1} f\,\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_1 + \partial_{x_3}\partial_{x_1} f\,\mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_1 \\ &\quad +\partial_{x_1}\partial_{x_2} f\,\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 + \partial_{x_3}\partial_{x_2} f\,\mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_2 \\ &\quad +\partial_{x_1}\partial_{x_3} f\,\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_3 + \partial_{x_2}\partial_{x_3} f\,\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 \\ &= (\partial_{x_2}\partial_{x_3} f - \partial_{x_3}\partial_{x_2} f)\,\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 \\ &\quad +(\partial_{x_3}\partial_{x_1} f - \partial_{x_1}\partial_{x_3} f)\,\mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_1 \\ &\quad +(\partial_{x_1}\partial_{x_2} f - \partial_{x_2}\partial_{x_1} f)\,\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \\ &= 0.\end{aligned}$$

- Bedeutung von $\mathrm{d}\,(\mathrm{d}\alpha) = 0$ im $\mathbb{R}^3$

$$\text{0-Form:} \qquad \alpha = f \tag{9.36}$$

$$\curvearrowright \mathrm{d}f = \sum_i \partial_{x_i} f\,\mathrm{d}x_i \qquad \hat{=}\,\text{Gradient} \tag{9.37}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\,(\mathrm{d}f) &= (\partial_{x_2}\partial_{x_3} f - \partial_{x_3}\partial_{x_2} f)\,\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 \\ &\quad +(\partial_{x_3}\partial_{x_1} f - \partial_{x_1}\partial_{x_3} f)\,\mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_1 \\ &\quad +(\partial_{x_1}\partial_{x_2} f - \partial_{x_2}\partial_{x_1} f)\,\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \\ &= 0 \qquad \hat{=}\,\partial_{\underline{r}} \times \partial_{\underline{r}}\, f = 0\end{aligned} \tag{9.38}$$

$$\text{1-Form:} \qquad \alpha = \sum_1 a_i\,\mathrm{d}x_i \tag{9.39}$$

$$\begin{aligned}\curvearrowright \quad \mathrm{d}\alpha &= (\partial_{x_2} a_3 - \partial_{x_3} a_2)\,\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 \\ &\quad +(\partial_{x_3} a_1 - \partial_{x_1} a_3)\,\mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_1 \\ &\quad +(\partial_{x_1} a_2 - \partial_{x_2} a_1)\,\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2\end{aligned}$$

$$\mathrm{d}\alpha \;\hat{=}\; \text{Rotation} \tag{9.40}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(\mathrm{d}\alpha) &= \partial_{x_1}(\partial_{x_2}a_3 - \partial_{x_3}a_2)\,\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 \\
&\quad +\partial_{x_2}(\partial_{x_3}a_1 - \partial_{x_1}a_3)\,\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_1 \\
&\quad +\partial_{x_3}(\partial_{x_1}a_2 - \partial_{x_2}a_1)\,\mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \\
&= \{\partial_{x_1}(\partial_{x_2}a_3 - \partial_{x_3}a_2) \\
&\quad +\partial_{x_2}(\partial_{x_3}a_1 - \partial_{x_1}a_3) \\
&\quad +\partial_{x_3}(\partial_{x_1}a_2 - \partial_{x_2}a_1)\}\,\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 \\
&= 0 \\
\mathrm{d}(\mathrm{d}\alpha) &\hat{=} \partial_{\underline{r}}(\partial_{\underline{r}} \times \underline{a}) = 0
\end{aligned} \tag{9.41}$$

Es ist schon bemerkenswert, in welch kompakter und einheitlicher Form diese herkömmlichen und scheinbar sehr verschiedenen Differentialoperationen jetzt dargestellt sind.

4 Integralsätze

Wir erinnern uns an Kapitel 1 und 3: Die Integralsätze einschließlich des Fundamentalsatzes der Integral- und Differentialrechnung verknüpfen das Integral über ein Gebiet mit dem Integral über den Rand dieses Gebietes. Diese einheitliche Idee wird sich in der Sprache der Differentialformen in einem einzigen Integralsatz darstellen.

Wir betrachten ein Gebiet S, dessen Dimension $p+1$ sei. Der Rand ∂S ist dann p-dimensional. In der Sprache der Differentialformen wird der vereinheitlichte Integralsatz „Satz von Stokes“ genannt. Er lautet

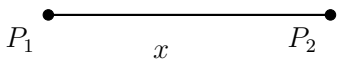
$$\int_S \mathrm{d}\omega = \int_{\partial_S} \omega, \tag{9.42}$$

wobei ω eine p-Form und $\mathrm{d}\omega$ das Äußere Differential von ω, also eine $(p+1)$-Form darstellen.

Anstatt des Beweises sollen die traditionellen Integralsätze aus (9.42) abgeleitet werden. Für den Beweis selbst verweisen wir z.B. auf [Arn88] s.197.

Raum	Satz	S	∂S
$\mathbb{R}^1$	Fundamentalsatz	1-dim: Linie	0-dim: Randpunkte
$\mathbb{R}^2$	Green-Satz Stokes-Satz	2-dim: Fläche	1-dim: Randlinie
$\mathbb{R}^3$	Gauß-Satz	3-dim: Volumen	2-dim: Randfläche

- Sei jetzt $p=0$, dann ist S das 1-dim Gebiet x und ∂S ist 0-dim und wird von den beiden Randpunkten P_1, P_2 gebildet.



$$\begin{aligned}
\omega &= F(x) && \text{(0-Form)} \\
\curvearrowright \quad \mathrm{d}\omega &= \partial_x F\,\mathrm{d}x && \text{(1-Form)}
\end{aligned}$$

Die linke Seite ergibt

$$\int_S \mathrm{d}\omega = \int_S \partial_x F\,\mathrm{d}x = F|_{P_1}^{P_2} = F(P_2) - F(P_1) \tag{9.43}$$

und die rechte Seite

$$\int\limits_{\partial S} \omega = \int\limits_{\partial S} F(x) = F\left(P_2\right) - F\left(P_1\right) \tag{9.44}$$

Dabei ist ∂S als Summe über die Randpunkte zu verstehen. Das negative Vorzeichen von $F\left(P_1\right)$ entsteht dadurch, daß der Rand immer „nach außen“ gerichtet ist.
Der Fundamentalsatz der Integral- und Differentialrechnung läßt sich also aus dem allgemeinen Integralsatz ableiten. F ist hier die Stammfunktion, $\partial_x F$ spielt die Rolle der Ausgangsfunktion.

- Sei $p = 1$, dann ist S ein 2-dim Gebiet, also eine Fläche, ∂S ist 1-dim, also die Randlinie der Fläche.

$$\begin{aligned} \omega &= a_1\,\mathrm{d}x_1 + a_2\,\mathrm{d}x_2 + a_3\,\mathrm{d}x_3 && \text{(1-Form)} \\ \mathrm{d}\omega &= \left(\partial_{x_2} a_3 - \partial_{x_3} a_2\right)\,\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 \\ &\quad + \left(\partial_{x_3} a_1 - \partial_{x_1} a_3\right)\,\mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_1 && \text{(2-Form)} \\ &\quad + \left(\partial_{x_1} a_2 - \partial_{x_2} a_1\right)\,\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \end{aligned}$$

Die linke Seite ergibt

$$\int\limits_S \mathrm{d}\omega = \int\limits_S \partial_{\underline{r}} \times\ \underline{a}\,\mathrm{d}\underline{O} \tag{9.45}$$

und die rechte Seite

$$\int\limits_{\partial S} \omega = \int\limits_{\partial S} \left(a_1\,\mathrm{d}x_1 + a_2\,\mathrm{d}x_2 + a_3\,\mathrm{d}x_3\right) = \int\limits_{\partial S} \underline{a}\,\mathrm{d}\underline{r} \tag{9.46}$$

Es ergibt sich für $p = 1$ also der konventionelle Stokes-Satz.

Noch eine Bemerkung zum Integral der Form

$$\int\limits_S \left(\partial_{x_2} a_3 - \partial_{x_3} a_2\right)\,\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3$$

Das Integral ist im Riemann-Sinne, also als Grenzwert einer Zerlegungssumme, anzuwenden. Hier wird die Summe über Flächenelemente, die gerade durch $\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3$ gegeben sind, gebildet.

- Sei $p = 2$, dann ist S 3-dim, also ein Volumen , ∂S ist 2-dim, also die Randfläche oder Oberfläche des Volumens.

$$\begin{aligned} \omega &= b_1\,\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 + b_2\,\mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_1 + b_3\,\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 && \text{(2-Form)} \\ \mathrm{d}\omega &= \left(\partial_{x_1} b_1 + \partial_{x_2} b_2 + \partial_{x_3} b_3\right)\,\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 && \text{(3-Form)} \end{aligned}$$

Die linke Seite ergibt

$$\int\limits_S \mathrm{d}\omega = \int\limits_S \partial_{\underline{r}}\ \underline{b}\,\mathrm{d}V \tag{9.47}$$

und die rechte Seite

$$\int\limits_{\partial S} \omega = \int\limits_{\partial S} \left(b_1\,\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 + b_2\,\mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_1 + b_3\,\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2\right) = \int\limits_{\partial S} \underline{b}\,\mathrm{d}\underline{O}. \tag{9.48}$$

Es ergibt sich für $p = 2$ also der Gauß-Satz.

- Der Fall $p = 4$ kommt im $\mathbb{R}^3$ nicht vor, aber im $\mathbb{R}^4$ und höherdimensionalen Räumen gibt es entsprechende Integralsätze.

- Ein Spezialfall tritt ein, wenn S selbst der Rand eines anderen Gebietes (A) ist. Dann gilt:

$$S = \partial A \quad \curvearrowright \quad \partial S = \partial\partial A = \{\}$$

∂S ist also die leere Menge, denn ein Rand hat keinen Rand.

$$\int_S \mathrm{d}\omega = \int_{\partial A} \mathrm{d}\omega = \int_A \mathrm{dd}\omega = 0 \qquad \text{wg. } \mathrm{dd}\omega = 0 \tag{9.49}$$

$$\| \tag{9.50}$$

$$\int_{\partial S} \omega = \int_{\partial\partial A} \omega = 0 \qquad \text{wg. } \partial\partial A = 0 \tag{9.51}$$

Literaturverzeichnis

[Arn88] V. Arnold. *Mathematische Methoden der klassischen Mechanik.* Birkhäuser, Basel, 1988.

[AW01] G. B. Arfken and H. Weber. *Mathematical Methods for Physicists.* Academic Press, 2001.

[FK98] H. Fischer and H. Kaul. *Mathematik für Physiker Band 2.* B.G. Teubner Verlag, 1998.

[FK01] H. Fischer and H. Kaul. *Mathematik für Physiker Band 1.* B.G. Teubner Verlag, 2001.

[Gro00] S. Großmann. *Mathematischer Einführungskurs in die Physik.* B.G. Teubner Verlag, 2000.

[Kam62] E. Kamke. *Differentialgleichungen.* Akademische Verlagsgesellschaft Geest Portig, 1962.

[LP98] C. Lang and N. Pucker. *Mathematische Methoden in der Physik.* Spektrum Akademischer Verlag, 1998.

Index

Ableitung, 11
  Ausere, 212
  partielle, 12
  totale, 15
analytische Funktion, 45
Analytizitätsgebiet, 45
Anfangsbedingung, 162
Auseres Produkt, 208

Bahnkurve, 58
Basis
  kontravariante, 87
  kovariante, 87
  Orthonormal- (ONB), 58
Basistransformation, 111
Bernoulli-Gleichung, 164
Bogenlange, 100

Cauchy-Riemann-Relationen, 46

Dachprodukt, 208
Darstellung
  algebraische, 40
  Exponential-, 41
  trigonometrische, 40
Deltafunktion δ, 81
Determinante, 91
Differential, 11
  totales, 13
  vollständiges, 13
Differential $\mathrm{d}f$, 96
Differentialformen, 212
Differentialformen-Kalkul, 207
Differentialgleichung
  Bessel-, 175
  Hermite-, 175
  Laguerre-, 175
  Legrendre-, 175
Differentialgleichungen, 159
  Bedeutung, 160
  explizite, 159
  gewohnliche, 159, 161
  implizite, 159
  lineare, 159, 161, 168
  Losbarkeit, 160
  nichtlineare, 159, 163
  Ordnung, 159
  partielle, 159, 180
  Systeme, 160, 176
Divergenz, 63, 97, 101
Dreiecksungleichung
  der Integralrechnung, 23

Euler-Formel, 41

Faltung, 201
Faltungssatz, 201
Formen, 212
Fundamentaltensor
  inverser, 103
  metrischer, 99

Gauss-Zahlenebene, 39
Gradient, 60, 96, 101

Hauptsatz
  Diff.- und Int.-rechnung, 22

Indexkalkl, 98
Indexschreibweise, 66
Indexziehen, 91
Integral
  Flächen-, 29
  Kurven-, 69
  Linien-, 25
  Oberflächen-, 33
  Oberflachen-, 69
  Volumen-, 35, 70
Integralformel
  1. Green-, 83
  2. Green-, 83
Integralformel nach Cauchy, 52
Integralsatz
  Derivate, 82
  Gauß-, 75
  Green-, der Ebene, 71
  Stokes-, 72
Integralsatz von Cauchy, 48
Integraltransformation, 197
Integration
  durch Partialbruchzerlegung, 24

durch Substitution, 23
partielle, 23
Integrierender Faktor, 166

Keilprodukt, 208
Komplexe Zahlen, 39
kontravariant, 87, 111
Koordinaten
Orthogonale, 99
Koordinatentransformation, 110
kovariant, 87, 111
Kronecker-Symbol, 92
Kugelkoordinaten, 106
Kurvenlänge, 28

Laplace-Operator, 68, 98, 103
Levi-Civita-Symbol, 66, 91
Linienelement, 100
linienelement, 100

Matrix, 91
Metrische Fundamentalgleichung, 103, 113
Mittelwertsatz
der Integralrechnung, 23
Moivre-Formel, 41

Nabla (∇), 61

Polstelle, 45
n-ter Ordnung, 53
Potenzreihenansatz, 174

Quotientensatz, 115

Residuensatz, 53, 54
Residuum, 54
Ricatti Dgl., 159
Riemann-Blaetter, 45
Rotation, 64, 97, 102

Schrodinger Gleichung, 160
Schwarz, Satz von, 14
singulärer Punkt, 45
Sinus-Gordon-Gleichung, 159
Skalarprodukt, 58, 93
Spatprodukt, 94, 117
Summenkonvention, 66

Taylor, Satz von, 20
Trajektorie, 58
Transformation
Fourier-, 197
Laplace-, 204

Vektorfeld, 59, 63
Vektorprodukt, 93, 119
Verjungung, 114
Volumenelement, 117

Wedge, 208
Wellengleichung, 159

Zylinderkoordinaten, 104