INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

Prof. Dr. U. Motschmann
Dipl.-Phys. S. Simon

PHYSIKALISCHE RECHENMETHODEN II — SOSE 2005

12. Übungsblatt — Besprechung am Montag, d. 11.07.05

Fragen zu den Übungsaufgaben: S. Simon, Raum A317, Tel. 391-5187, sven.simon@tu-bs.de

---

32. Fouriertransformation der Poisson-Gleichung

Die Oberfläche einer Kugel mit Radius R trägt die konstante Flächenladungsdichte σ_0. Der Mittelpunkt der Kugel soll im Koordinatenursprung liegen. Wir unterscheiden die Raumbereiche I ($r < R$) und II ($r > R$), wobei

$$r = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2}$$

der Abstand zum Mittelpunkt der Kugel ist. Ziel dieser Aufgabe ist die Berechnung des elektrostatischen Potentials Φ im Innen- und Außenraum. Dazu verwenden wir die Maxwell-Gleichungen der Elektrostatik:

$$\operatorname{div} \underline{E}\,(\underline{r}) = \frac{\rho\,(\underline{r})}{\epsilon_0} \quad ; \tag{1}$$

$$\operatorname{rot} \underline{E}\,(\underline{r}) = \underline{0} \quad . \tag{2}$$

Mit $\rho\,(\underline{r})$ wird die Ladungsdichte bezeichnet. Gl. (2) impliziert die Existenz eines skalaren Potentials $\Phi(\underline{r})$ mit $\underline{E} = -\nabla\Phi$ (Begründung?). Einsetzen dieses Ansatzes in Gl. (1) führt zur sog. *Poisson-Gleichung*

$$\triangle\Phi\,(\underline{r}) = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho(\underline{r})$$

für das Potential Φ.

(a) Bestimmen Sie das elektrische Feld und damit das Potential Φ im Innen- und Außenraum unter Benutzung der integralen Form von Gl. (1).

Einen alternativen Weg zur Bestimmung des Potentials stellt die Benutzung der Fourier-Transformation dar. Unter der Fouriertransformation einer Funktion $f\,(\underline{r}) \mapsto f\,(\underline{k})$ verstehen wir den Ausdruck

$$f\,(\underline{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3 r\, e^{-i\underline{k}\cdot\underline{r}} f\,(\underline{r}) \quad .$$

Die Rücktransformation ist durch

$$f\,(\underline{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3 k\, e^{i\underline{k}\cdot\underline{r}} f\,(\underline{k})$$

gegeben.

(b) Sukzessives Anwenden von Fouriertransformation und Rücktransformation auf $f\,(\underline{r})$ sollte wieder auf $f\,(\underline{r})$ führen. Überprüfen Sie diese Aussage.

(c) Zeigen Sie nun, daß

$$\Phi(\underline{k}) = \frac{1}{\epsilon_0\,|\underline{k}|^2}\,\rho(\underline{k}) \tag{3}$$

gilt, wenn $\Phi(\underline{r})$ und $\rho(\underline{r})$ die Poisson-Gleichung erfüllen.

(d) Berechnen Sie die Fouriertransformierte $\rho(\underline{k})$ der Ladungsverteilung. Machen Sie sich dafür zunächst klar, daß die Ladungsdichte durch $\rho(\underline{r})\,\mathrm{d}V = \sigma_0 r^2\,\sin\theta\delta(r-R)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$ gegeben ist.

(e) Setzen Sie Ihr Ergebnis aus Teil (d) in Gleichung (3) ein und bestimmen Sie $\Phi(\underline{r})$ durch Fourier-Rücktransformation.