INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

Prof. Dr. U. Motschmann
Dipl.-Phys. S. Simon

PHYSIKALISCHE RECHENMETHODEN II — SOSE 2005

9. Übungsblatt — Besprechung am Montag, d. 20.06.05

Fragen zu den Übungsaufgaben: S. Simon, Raum A317, Tel. 391-5187, sven.simon@tu-bs.de

23. **Einige Beweise über komplexe Zahlen**
Beweisen Sie folgende Aussagen für beliebige $z \in \mathbb{C}$ und $x \in \mathbb{R}$:
    (a) $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$
    (b) $(\overline{z})^n = \overline{(z^n)}$
    (c) $\frac{\sin x}{2} + \frac{\sin 2x}{2^2} + \frac{\sin 3x}{2^3} + \ldots = \frac{2 \sin x}{5 - 4 \cos x}$

24. **Integrale komplexer Funktionen**
Berechnen Sie die folgenden Integrale:
    (a) $\int \left(z^2 + 3z\right) \mathrm{d}z$ entlang eines Kreises mit $|z| = 2$ von 2 bis $2i$ im mathematisch positiven Sinn.
    (b) $\int (\overline{z})^2 \, \mathrm{d}z$ entlang der Kreise mit $|z| = 1$ und $|z-1| = 1$ im mathematisch positiven Sinn.
    (c) $\int \frac{1}{z} \mathrm{d}z$ entlang der Kreise mit $|z| = 1$ und $|z-5| = 1$ im mathematisch positiven Sinn.

25. **Analytisch Funktionen**
Prüfen Sie, ob folgende Funktionen analytisch sind:
    (a) $\overline{z}$ (b) $\exp(iz)$ (c) $\sin(z)$ (d) $\cos(\overline{z})$

26. **Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen in Polarkoordinaten**
Die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen sollen in Polarkoordinaten (ρ, ϕ) angegeben werden.
    (a) Wir betrachten eine Funktion $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$. Zeigen Sie: f ist *genau dann* analytisch, wenn die Bedingung
    $$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$$
    erfüllt ist.
    (b) Benutzen Sie das Ergebnis von Teil (a), um die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen für eine analytische Funktion $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ in Polarkoordinaten zu formulieren.