INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

Prof. Dr. U. Motschmann
Dipl.-Phys. S. Simon

PHYSIKALISCHE RECHENMETHODEN II — SoSe 2005

7. Übungsblatt — Besprechung am Montag, d. 06.06.05

Fragen zu den Übungsaufgaben: S. Simon, Raum A317, Tel. 391-5187, sven.simon@tu-bs.de

17. **Kettenregel und partielle Ableitungen**
Gegeben seien zwei Koordinatensysteme (x, y, z) und (λ, μ, ν). Zeigen Sie, daß aus $x = \lambda$ *nicht* $\partial/\partial x = \partial/\partial\lambda$ folgt. Betrachten Sie dazu die Koordinatentransformation $(x, y, z) \mapsto (\lambda, \mu, \nu)$ mit

$$\lambda = x \quad , \quad \mu = ax + by + cz \quad , \quad \nu = Ax + By + Cz \quad \text{und} \quad \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b & c \\ A & B & C \end{pmatrix} \neq 0$$

und drücken Sie das vollständige Differential

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial\lambda}\mathrm{d}\lambda + \frac{\partial f}{\partial\mu}\mathrm{d}\mu + \frac{\partial f}{\partial\nu}\mathrm{d}\nu$$

einer Funktion $f(\lambda, \mu, \nu)$ in den Koordinaten (x, y, z) aus, indem Sie die Differentiale der Koordinatenfunktionen einsetzen.

18. **Unitäre Transformationen**
In dieser Aufgabe betrachten wir Transformationen zwischen zwei *kartesischen* Koordinatensystemen. Das Tripel $\mathrm{d}\underline{r} = \left(\mathrm{d}x^1, \mathrm{d}x^2, \mathrm{d}x^3\right)$ verhält sich unter Koordinatentransformationen zwischen zwei kartesischen Koordinatensystemen wie ein Tensor erster Stufe, d.h. es gilt

$$\mathrm{d}x^{a'} = J_b^{a'}\mathrm{d}x^b \quad ,$$

wobei $J_b^{a'}$ die Transformationsmatrix ist.

(a) Zeigen Sie, daß in einem kartesischen Koordinatensystem die kovariante Basis und die kontravariante Basis identisch sind.

(b) Zeigen Sie, daß aus der Bedingung, daß sich die Länge eines Vektors $\underline{v}$ unter der Transformation nicht ändert,

$$\sum_{a'} J_b^{a'} J_c^{a'} = \delta_{bc} \quad \text{sowie} \quad \sum_{a'} J_{a'}^b J_{a'}^c = \delta^{bc} \tag{1}$$

folgt. Zeigen Sie außerdem, daß $\det\left(J_b^{a'}\right) = \pm 1$ ist.
Hinweis: In Gl. (1) wurde auf Anwendung der Summenkonvention verzichtet, da der Index a' jeweils an *beiden* Faktoren unten bzw. oben steht.

(c) Zeigen Sie, daß sich die Geschwindigkeit $\underline{v} = \mathrm{d}_t\underline{r}$ wie ein Tensor erster Stufe transformiert.

(d) Für eine Massenverteilung $\rho\left(\underline{r}\right)$ ist der *Trägheitstensor* durch

$$\Theta_{ab} = \int \mathrm{d}V\, \rho\left(\underline{r}\right)\left(\underline{r}^2\delta_{ab} - x_a x_b\right)$$

definiert.

i. Betrachten Sie vier Punktmassen der Masse M, die sich an den Orten $(\pm a, \pm a, 0)$ befinden. Geben Sie die Massendichte $\rho\left(\underline{r}\right)$ mit Hilfe der Dirac'schen δ-Funktion an und berechnen Sie die Komponenten des Trägheitstensors.

ii. Zeigen Sie allgemein: Θ_{ab} verhält sich unter Koordinatentransformationen wie ein Tensor zweiter Stufe.

Rückseite beachten! ⟶

19. **Symmetrischer und antisymmetrischer Tensor**
S_{ab} und A_{ab} seien die kovarianten Komponenten zweier Tensoren 2. Stufe. Es gelte $S_{ab} = S_{ba}$ (symmetrischer Tensor) und $A_{ab} = -A_{ba}$ (antisymmetrischer Tensor).

(a) Zeigen Sie, daß dann für die kontravarianten Komponenten auch

$$S^{ab} = S^{ba} \quad \text{und} \quad A^{ab} = -A^{ba}$$

gilt.

(b) Zeigen Sie weiterhin, daß

$$S_{ab}A^{ba} = 0$$

gilt.