INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

Prof. Dr. U. Motschmann
Dipl.-Phys. S. Simon

PHYSIKALISCHE RECHENMETHODEN II — SoSe 2005

6. Übungsblatt — Besprechung am Montag, d. 30.05.05

Fragen zu den Übungsaufgaben: S. Simon, Raum A317, Tel. 391-5187, sven.simon@tu-bs.de

15. **Krummlinige, nicht-orthogonale Koordinaten**
Als Beispiel für krummlinige und nicht-orthogonale Koordinaten ξ^1, ξ^2, ξ^3 betrachten wir (x^1, x^2, x^3 sind kartesische Koordinaten)

$$x^1 = a\,\xi^1 \cos\left(\xi^2\right) \quad ; \quad x^2 = b\,\xi^1 \sin\left(\xi^2\right) \quad ; \quad x^3 = c\,\xi^3$$

mit $a, b, c \neq 0$.

(a) Stellen Sie die ko- und kontravariante Basis ($\{\underline{b}_1, \underline{b}_2\}$ bzw. $\{\underline{b}^1, \underline{b}^2\}$) sowie den metrischen Tensor auf. Skizzieren Sie die Koordinatenlinien in der (x^1, x^2)-Ebene für $a = 1, b = 2$ und zeichnen Sie die ko- und kontravarianten Basisvektoren in den Punkten $(\xi^1, \xi^2) = (1, \pi/4)$ bzw. $(\xi^1, \xi^2) = (1, \pi/2)$ ein. Welche Gleichungen beschreiben die Linien $\xi^1 = \text{const}$ bzw. $\xi^2 = \text{const}$ in kartesischen Koordinaten? Was ergibt sich für den metrischen Tensor und die Basisvektoren im Fall $a = b = c = 1$?

(b) Im Punkt $P = (\xi^1, \xi^2) = (1, \pi/4)$ haben zwei Vektorfelder $\underline{E}_1$, $\underline{E}_2$ bezüglich kartesischer Einheitsvektoren $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2\}$ die Darstellungen $\underline{E}_1 = \underline{e}_1 + 2\underline{e}_2$ bzw. $\underline{E}_2 = 2\underline{e}_2$. Stellen Sie diese Vektoren bezüglich der Basen $\{\underline{b}_1, \underline{b}_2\}$ und $\{\underline{b}^1, \underline{b}^2\}$ dar. Berechnen Sie das Skalarprodukt $\underline{E}_1 \cdot \underline{E}_2$ in kartesischen Koordinaten und in den Koordinaten ξ^1, ξ^2.

(c) Bestimmen Sie den Laplace-Operator in den Koordinaten ξ^1, ξ^2, ξ^3. Geben Sie das Ergebnis auch für den Spezialfall $a = b = c = 1$ an.

16. **Kugelkoordinaten**
Wir betrachten das System der Kugelkoordinaten. Als Konvention vereinbaren wir $(\xi^1, \xi^2, \xi^3) = (r, \theta, \phi)$.

(a) Bestimmen Sie die kovarianten Basisvektoren $\underline{b}_a$ für Kugelkoordinaten. Ermitteln Sie die kontravarianten Basisvektoren aus $\underline{b}^a = g^{ab}\underline{b}_b$. Verifizieren Sie die Formeln

$$\underline{b}^a = \frac{\underline{b}_b \times \underline{b}_c}{\sqrt{g}} \quad \text{und} \quad \sqrt{g} = \underline{b}_1 \cdot (\underline{b}_2 \times \underline{b}_3)$$

mit $(a, b, c) = (1, 2, 3)$ und zyklisch. Mit g wird die Determinante des metrischen Tensors g_{ab} bezeichnet.

(b) Geben Sie die Geschwindigkeit und die Beschleunigung bezogen auf die normierte kovariante Basis an.

(c) Geben Sie den Gradienten bezüglich der normierten kovarianten Basis an.

(d) Bestimmen Sie Divergenz, Rotation und Laplace-Operator in Kugelkoordinaten, jeweils bezogen auf die normierte kovariante Basis.