INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

Prof. Dr. U. Motschmann
Dipl.-Phys. S. Simon

Physikalische Rechenmethoden II — SoSe 2005

5. Übungsblatt — Besprechung am Montag, d. 23.05.05

Fragen zu den Übungsaufgaben: S. Simon, Raum A317, Tel. 391-5187, sven.simon@tu-bs.de

---

12. **Flächenberechnung mit dem Satz von Stokes**
Betrachten Sie das Vektorfeld

$$\underline{F} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -x^2 \\ x^1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und eine beliebige, geschlossene Kurve C in der (x^1, x^2)-Ebene.

   (a) Zeigen Sie, daß durch das Linienintegral $\oint_C \underline{F} \cdot \mathrm{d}\underline{r}$ der Inhalt der orientierten, von C eingeschlossenen Fläche gegeben ist.

   (b) Verifizieren Sie diese Aussage für die Kurve

$$C : [0, 2\pi[\, \ni t \mapsto \underline{C}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \frac{1}{2}\sin(2t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

   (c) und für ein Dreieck, dessen einer Eckpunkt im Ursprung liege.

13. **Nicht-orthogonale Koordinaten I**
Bezüglich kartesischer Koordinaten x^1, x^2 seien zwei Vektorfelder $\underline{E}_1$, $\underline{E}_2$ durch

$$\underline{E}_1\left(x^1, x^2\right) = \begin{pmatrix} 2x^1 - x^2 \\ 3x^2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \underline{E}_2\left(x^1, x^2\right) = \begin{pmatrix} \left(x^2\right)^2 \\ x^2 \end{pmatrix}$$

gegeben. Wir definieren neue Koordinaten ξ^1, ξ^2 durch

$$x^1 = \xi^1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\xi^2 \quad \text{und} \quad x^2 = \frac{2}{\sqrt{3}}\xi^2 \quad .$$

   (a) Stellen Sie die kovariante Basis $\{\underline{b}_1, \underline{b}_2\}$, die kontravariante Basis $\left\{\underline{b}^1, \underline{b}^2\right\}$ und den metrischen Tensor der neuen Koordinaten auf. Skizzieren Sie die Koordinatenlinien und die ko- bzw. kontravarianten Basisvektoren.

   (b) Stellen Sie die Vektorfelder $\underline{E}_1\left(x^1, x^2\right)$ und $\underline{E}_2\left(x^1, x^2\right)$ im Punkt $P_0 = \left(x^1 = 1, x^2 = 1\right)$ bezüglich der Basissysteme $\{\underline{b}_1, \underline{b}_2\}$ sowie $\left\{\underline{b}^1, \underline{b}^2\right\}$ dar.

   (c) Berechnen Sie das Skalarprodukt $\underline{E}_1\left(x^1, x^2\right) \cdot \underline{E}_2\left(x^1, x^2\right)$ sowohl in kartesischen Koordinaten als auch in den Koordinaten ξ^1, ξ^2.

14. **Nicht-orthogonale Koordinaten II**
Wir bezeichnen mit x^1, x^2 die Koordinaten bezüglich der kartesischen Basis $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2\}$ und führen über

$$\xi^1 = x^1 - 2x^2 \quad ; \quad \xi^2 = x^1 - \frac{1}{2}x^2$$

neue Koordinaten ξ^1, ξ^2 ein.

   (a) Bestimmen Sie die Koordinatenlinien $\xi^i = \mathrm{const}$ in der Form $x^2 = f\left(x^1\right)$, und fertigen Sie eine geeignete Skizze an.

   (b) Berechnen Sie die kovarianten Basisvektoren $\underline{b}_i = \mathrm{d}\underline{r}/\mathrm{d}\xi^i$. Tragen Sie diese Vektoren in die Skizze ein.

   (c) Bestimmen Sie die zu den neuen Koordinaten gehörigen kontravarianten Basisvektoren $\underline{b}^i$ aus der Gleichung $\underline{b}_i \cdot \underline{b}^j = \delta_i^j$ und zeichnen Sie diese in die Skizze ein. Verifizieren Sie die Gleichung $\underline{b}^i = \nabla_{(x^1,x^2)}\xi^i$.

   (d) Bestimmen Sie die ko- und kontravarianten Komponenten des metrischen Tensors. Überprüfen Sie Ihr Ergebnis anhand der Beziehung $\underline{b}^i = g^{ij}\underline{b}_j$.