INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

Prof. Dr. U. Motschmann
Dipl.-Phys. S. Simon

Physikalische Rechenmethoden II — SoSe 2005

4. Übungsblatt — Besprechung am Montag, d. 09.05.05

Fragen zu den Übungsaufgaben: S. Simon, Raum A317, Tel. 391-5187, sven.simon@tu-bs.de

---

10. **Diracsche δ-Funktion**
Wir betrachten die Abbildung δ_{x_0}, die auf (stetige) reelle Funktionen f einer reellen Variablen wie folgt wirkt:

$$\delta_{x_0}[f] := f(x_0).$$

(a) Zeigen Sie, daß die Funktionen

$$d_l(x) := \begin{cases} 1/l & ; \quad -l/2 \le x \le l/2 \\ 0 & ; \quad \text{sonst} \end{cases}$$

normiert sind (d.h., $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \, d_l(x) = 1$) und berechnen Sie das Faltungsintegral

$$d_l[f] := \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \, d_l(x - x_0) f(x),$$

wobei f eine beliebige, reelle Testfunktion ist. Was erhalten Sie im Grenzfall $\lim_{l\to 0} d_l[f]$? Skizzieren Sie $d_l(x)$ für $l = 1, 1/2, 1/4, 1/8, \ldots$.
Hinweis: Verwenden Sie den Mittelwertsatz der Integralrechnung.

(b) Verfahren Sie analog zu Teil (a) mit den Funktionen

$$g_l(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi} l} \exp(-x^2/(2l^2)).$$

(c) Für die Diracsche δ-Funktion wird üblicherweise die Schreibweise

$$\delta_{x_0}[f] := \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \, \delta(x - x_0) f(x)$$

verwendet. In drei Dimensionen definieren wir die δ-Funktion über:

$$\delta(\underline{r}) := \delta(x^1)\delta(x^2)\delta(x^3); \quad \underline{r} = (x^1, x^2, x^3).$$

Berechnen Sie:
i. $\int \mathrm{d}V \, \underline{r} \, \rho(\underline{r})$ mit $\rho(\underline{r}) = \sum_{i=1}^{N} \delta(\underline{r} - \underline{r}_i)$; $V = \mathbb{R}^3$.
ii. $\int \mathrm{d}V \, e^{i\underline{k}\cdot\underline{r}} \, \delta(\underline{r})$; $V = \mathbb{R}^3$ (Fouriertransformation der δ-Funktion).

11. **Mittelwertsatz für harmonische Funktionen**
Es sei Φ eine *harmonische Funktion*, d.h. eine Funktion, die der Laplace-Gleichung $\triangle\Phi = 0$ genügt. Zeigen Sie, daß das Mittel von Φ über eine Kugel vom Radius R um $\underline{y}$ gleich $\Phi(\underline{y})$ ist. Gehen Sie dabei wie folgt vor:

(a) Zeigen Sie: Das gesuchte Mittel ist

$$m_R = \int_{\partial K} \mathrm{d}\underline{f} \cdot (\Phi \, \nabla\Psi) \quad \text{mit} \quad \Psi(\underline{x}) = -\frac{1}{4\pi \, |\underline{x} - \underline{y}|} \quad ,$$

wobei ∂K die Oberfläche der Kugel vom Radius R bezeichnet.

(b) Zeigen Sie mit dem Gaußschen Satz: $\int_{\partial K} \mathrm{d}\underline{f} \cdot \nabla\Phi = 0$.

(c) Wenden Sie den Gaußschen Satz auf das Vektorfeld $(\Phi \, \nabla\Psi - \Psi \, \nabla\Phi)$ an und benutzen Sie, daß Ψ auf der Kugeloberfläche konstant ist.