INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

Prof. Dr. U. Motschmann
Dipl.-Phys. S. Simon

PHYSIKALISCHE RECHENMETHODEN II — SOSE 2005

3. Übungsblatt — Besprechung am Montag, d. 02.05.05

Fragen zu den Übungsaufgaben: S. Simon, Raum A317, Tel. 391-5187, sven.simon@tu-bs.de

---

7. **Differentialoperatoren III**
   Es sollen die elektromagnetische Wellengleichung sowie die Helmholtz-Gleichung hergeleitet werden.
   (a) Es seien die Maxwellschen Gleichungen für das Vakuum gegeben:
$$\begin{aligned}\operatorname{div}\underline{B}\,(\underline{r},t) &= 0\\ \operatorname{div}\underline{D}\,(\underline{r},t) &= 0\\ \operatorname{rot}\underline{H}\,(\underline{r},t) &= \frac{\partial}{\partial t}\underline{D}\,(\underline{r},t)\\ \operatorname{rot}\underline{E}\,(\underline{r},t) &= -\frac{\partial}{\partial t}\underline{B}\,(\underline{r},t)\quad .\end{aligned}$$
   Dabei ist $\underline{D}\,(\underline{r},t)=\epsilon_0\underline{E}\,(\underline{r},t)$ und $\underline{B}\,(\underline{r},t)=\mu_0\underline{H}\,(\underline{r},t)$. Man zeige, daß elektrisches und magnetisches Feld die *Wellengleichungen*
$$\triangle\underline{E}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\underline{E}=0\quad\text{bzw.}\quad\triangle\underline{B}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\underline{B}=0$$
   erfüllen.
   (b) Zeigen Sie, daß jedes Vektorfeld $\underline{A}$, das die Gleichung $\nabla\times(\nabla\times\underline{A})-k^2\underline{A}=0$ erfüllt ($k=\text{const}$), zugleich Lösung der *Helmholtz-Gleichung* $\triangle\underline{A}+k^2\underline{A}=0$ ist.

8. **Kraftfelder**
   Wir betrachten die Kraftfelder
$$\underline{F}_1=\begin{pmatrix}4\left(x^2\right)^2+3x^3\\ 8x^1x^2-8\left(x^3\right)^3\\ -24x^2\left(x^3\right)^2+3x^1\end{pmatrix}\quad\text{und}\quad\underline{F}_2=\begin{pmatrix}x^1x^3+3x^1\\ 3x^2x^3\\ \left(x^2\right)^2+\left(x^3\right)^4\end{pmatrix}\quad .$$
   (a) Welches der Kraftfelder ist konservativ? Bestimmen Sie, falls existent, ein geeignetes Potential V. Skizzieren Sie, falls von $\underline{0}$ verschieden, $\operatorname{rot}\underline{F}$.
   (b) Berechnen Sie für beide Felder das Wegintegral $\int\underline{F}\cdot\mathrm{d}\underline{r}$ zwischen den Punkten $(0,0,0)$ und $(1,0,1)$, und zwar längs der Wege
   - $C_1:\ (0,0,0)\rightarrow(1,0,0)\rightarrow(1,0,1)\quad ,$
   - $C_2:\ (0,0,0)\rightarrow(1,0,1)$ mit $x^3=x^1\quad ,$
   - $C_3:\ (0,0,0)\rightarrow(1,0,1)$ mit $x^3=\left(x^1\right)^2\quad .$

   (c) Besitzt $\underline{F}_2$ ein Potential, wenn man den Definitionsbereich auf die (x^1,x^2)-Ebene einschränkt?

9. **Coulomb-Potential**
   Das Coulomb-Potential einer Punktladung q am Ort $\underline{0}$ lautet
$$\Phi=\frac{\alpha}{r}\quad\text{mit}\quad\alpha=\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\quad\text{und}\quad r=\sqrt{(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2}\quad .$$
   (a) Stellen Sie die Taylorreihe von $\Phi\,(\underline{r})$ um den Punkt $\underline{r}=\underline{r}_0\neq\underline{0}$ bis zur zweiten Ordnung auf.
   (b) Geben Sie das zugehörige elektrische Feld $\underline{E}=-\nabla\Phi$ an.
   (c) Skizzieren Sie die Feldlinien und die Äquipotentialflächen.
   (d) Ermitteln Sie $\triangle\Phi$ für $r>0$ und verifizieren Sie den Gaußschen Satz
$$\int_{\mathcal{K}}\mathrm{d}V\,\operatorname{div}\underline{E}=\oint_{\partial\mathcal{K}}\underline{E}\cdot\mathrm{d}\underline{F}$$
   für das Vektorfeld $\underline{E}$ und die Gebiete $\mathcal{K}_1=\{\underline{r}\,|\,0<\epsilon\leq r\leq R\}$ bzw. $\mathcal{K}_2=\{\underline{r}\,|\,r\leq R\}$. Geben Sie $\triangle\Phi$ bzw. $\operatorname{div}\underline{E}$ für beliebige $\underline{r}$ an.