INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

Prof. Dr. U. Motschmann
Dipl.-Phys. S. Simon

PHYSIKALISCHE RECHENMETHODEN II — SOSE 2005

2. Übungsblatt — Besprechung am Montag, d. 25.04.05

Fragen zu den Übungsaufgaben: S. Simon, Raum A317, Tel. 391-5187, sven.simon@tu-bs.de

---

4. **Integralsatz von Stokes**
   Anhand einiger Beispiele soll die Anwendung dieses Satzes geübt werden:

   (a) Berechnen Sie das Wegintegral des Vektorfeldes

   $$\underline{A} = \left(2x^2 + 2x^1x^3\right)\underline{e}_1 + 3x^1\underline{e}_2 + \left(\left(x^1\right)^2 + \left(x^3\right)^3\right)\underline{e}_3$$

   entlang des Einheitskreises in der $\left(x^1, x^2\right)$-Ebene unter Benutzung des Satzes von Stokes.

   (b) Verifizieren Sie den Satz von Stokes für das Vektorfeld

   $$\underline{A} = \left(\frac{4}{3}x^1 - 2x^2\right)\underline{e}_1 + \left(3x^2 - x^1\right)\underline{e}_2$$

   und die durch

   $$\mathcal{F} = \left\{\underline{r}\,\middle|\, \left(\frac{x^1}{3}\right)^2 + \left(\frac{x^2}{2}\right)^2 \leq 1 \quad ; \quad x^3 = 0\right\}$$

   definierte Fläche.

   (c) Berechnen Sie das Wegintegral des Vektorfeldes

   $$\underline{A} = x^1x^3\underline{e}_1 + x^1x^2\underline{e}_2 + x^2x^3\underline{e}_3$$

   mit dem Integrationsweg $\Gamma : \left(x^1\right)^2 + \left(x^2\right)^2 = R^2;\ x^3 = x^1 + x^2$, der im mathematisch positiven Sinne durchlaufen wird, mit und ohne Anwendung des Satzes von Stokes.

5. **Differentialoperatoren I**
   Es sei Ψ ein skalares Feld; $\underline{A}$ und $\underline{B}$ seien Vektorfelder. Zeigen Sie unter Benutzung von Komponentenschreibweise und Einsteinscher Summenkonvention:

   (a) $\mathrm{div}\,(\Psi\underline{A}) = \Psi\,\mathrm{div}\,\underline{A} + \underline{A}\cdot\nabla\Psi \quad ;$
   (b) $\mathrm{rot}(\Psi\underline{A}) = \Psi\,\mathrm{rot}\ \underline{A} - \underline{A}\ \times\ \nabla\Psi$
   (c) $\mathrm{div}\,(\underline{A}\times\underline{B}) = \underline{B}\cdot\mathrm{rot}\,\underline{A} - \underline{A}\cdot\mathrm{rot}\,\underline{B} \quad ;$
   (d) $\nabla\times(\nabla\times\underline{A}) = \nabla\ (\nabla\cdot\underline{A}) - \triangle\underline{A} \quad ;$
   (e) Es sei $\underline{A} = \nabla\Psi$. Zeigen Sie: Dann gilt $\mathrm{rot}\,\underline{A} = 0$.
   (f) Es sei $\underline{B} = \mathrm{rot}\,\underline{A}$. Zeigen Sie: Dann gilt $\mathrm{div}\,\underline{B} = 0$.

6. **Differentialoperatoren II**
   Es sei $\underline{r} = \left(x^1, x^2, x^3\right)$ und $r = |\underline{r}|$. Unter der Annahme, daß $\underline{B}$, $\underline{P}$ und $\underline{M}$ nicht von $\underline{r}$ abhängen, berechne man

   (a) $\nabla\cdot\underline{r} \quad ;$
   (b) $\nabla\frac{1}{r}$ für $r \neq 0 \quad ;$
   (c) $\triangle\frac{1}{r}$ für $r \neq 0 \quad ;$
   (d) $\nabla\ \times\ \left(\frac{1}{2}\underline{B}\times\underline{r}\right) \quad ;$
   (e) $\nabla\left(\frac{\underline{P}\cdot\underline{r}}{r^3}\right)$ für $r \neq 0 \quad ;$
   (f) $\nabla\ \times\ \left(\frac{\underline{M}\times\underline{r}}{r^3}\right)$ für $r \neq 0 \quad .$