INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

Prof. Dr. U. Motschmann
Dipl.-Phys. S. Simon

PHYSIKALISCHE RECHENMETHODEN II — SOSE 2005

1. Übungsblatt — Besprechung am Montag, d. 18.04.05

Fragen zu den Übungsaufgaben: S. Simon, Raum A317, Tel. 391-5187, sven.simon@tu-bs.de

---

1. **Integralsatz von Gauß**
   Anhand einiger Beispiele soll die Anwendung dieses Satzes geübt werden:
   (a) Verifizieren Sie den Satz von Gauß für das Vektorfeld
   $$\underline{A} = ax^1\underline{e}_1 + bx^2\underline{e}_2 + cx^3\underline{e}_3$$
   und einen Zylinder um die x^3-Achse mit Radius R und mit Höhe von $-d$ bis d.
   (b) Berechnen Sie den Fluß des Vektorfeldes
   $$\underline{A} = x^1x^2\underline{e}_1 + x^2x^3\underline{e}_2 - x^3\underline{e}_3$$
   durch die geschlossene Oberfläche der Halbkugel mit $\left(x^1\right)^2 + \left(x^2\right)^2 + \left(x^3\right)^2 \leq R^2$ und $x^3 \geq 0$ ohne bzw. mit Hilfe des Satzes von Gauß.

2. **Volumen- und Oberflächenintegrale**
   Durch die Menge
   $$\mathcal{E} = \left\{ \left(x^1, x^2, x^3\right) \,\Big|\, \frac{\left(x^1\right)^2}{a^2} + \frac{\left(x^2\right)^2}{b^2} + \frac{\left(x^3\right)^2}{c^2} \leq 1 \right\}$$
   wird ein Ellipsoid mit den Halbachsen a, b und c definiert. Berechnen Sie die Gesamtmasse eines Ellipsoids mit konstanter Massendichte ρ_0 sowie dessen *Hauptträgheitsmomente*. Diese sind durch
   $$\begin{aligned} \Theta_{11} &= \rho_0 \int_{\mathcal{E}} \mathrm{d}V \left\{ \left(x^2\right)^2 + \left(x^3\right)^2 \right\} \quad ; \\ \Theta_{22} &= \rho_0 \int_{\mathcal{E}} \mathrm{d}V \left\{ \left(x^1\right)^2 + \left(x^3\right)^2 \right\} \quad ; \\ \Theta_{33} &= \rho_0 \int_{\mathcal{E}} \mathrm{d}V \left\{ \left(x^1\right)^2 + \left(x^2\right)^2 \right\} \end{aligned}$$
   definiert. Geben Sie zudem eine Formel zur Berechnung der Oberfläche des Ellipsoids an.

3. **Levi-Civitá-Symbol**
   Betrachten Sie das durch
   $$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{für } (i,j,k) \in \{(1,2,3),(2,3,1),(3,1,2)\} \\ -1 & \text{für } (i,j,k) \in \{(2,1,3),(1,3,2),(3,2,1)\} \\ 0 & \text{falls } (i,j,k) \text{ keine Permutation von } (1,2,3) \text{ ist} \end{cases}$$
   definierte total antisymmetrische Epsilon-Symbol.
   (a) Zeigen Sie:
   - $\sum\limits_{i} \epsilon_{ijk}\epsilon_{ilm} = \delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl}$;
   - $\sum\limits_{i,j,k} \epsilon_{ijk}\epsilon_{ijk} = 6$;
   - $\sum\limits_{i,j} \epsilon_{ijk}\epsilon_{ijm} = 2\delta_{km}$;
   - $\sum\limits_{i,k} \epsilon_{ijk}\delta_{ik} = 0$.

   (b) Für das Kreuzprodukt zweier Vektoren gilt $\left[\underline{A} \times \underline{B}\right]^i = \sum_{j,k} \epsilon_{ijk} A^j B^k$. Beweisen Sie die folgenden Beziehungen unter Benutzung der Komponentenschreibweise.
   - $\underline{A} \times \underline{B} = -\underline{B} \times \underline{A}$;
   - $\underline{A} \cdot (\underline{B} \times \underline{C}) = \underline{C} \cdot (\underline{A} \times \underline{B}) = \underline{B} \cdot (\underline{C} \times \underline{A})$;
   - $\underline{A} \times (\underline{B} \times \underline{C}) = \underline{B}\,(\underline{A} \cdot \underline{C}) - \underline{C}\,(\underline{A} \cdot \underline{B})$ (Graßmannscher Entwicklungssatz);
   - $(\underline{A} \times \underline{B}) \cdot (\underline{C} \times \underline{D}) = (\underline{A} \cdot \underline{C})\,(\underline{B} \cdot \underline{D}) - (\underline{B} \cdot \underline{C})\,(\underline{A} \cdot \underline{D})$.