INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

Prof. Dr. U. Motschmann
Dipl.-Phys. S. Simon

Physikalische Rechenmethoden I — WiSe 2005/06

Übungsklausur — Bearbeitungszeit: **120 Minuten**

1. **Trigonometrische Funktionen** **(3 Punkte)**
   Leiten Sie zunächst aus der Beziehung $e^{i(x+y)} = e^{ix}e^{iy}$ $(x, y \in \mathbb{R})$ das Additionstheorem für den Cosinus her:
   $$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y) \quad .$$
   Zeigen Sie dann mit Hilfe des Additionstheorems:
   $$\cos(4x) = \cos^4(x) - 6\sin^2(x)\cos^2(x) + \sin^4(x) \quad .$$

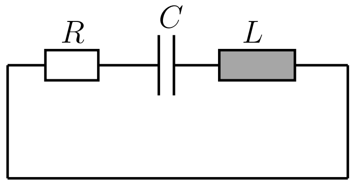
2. **Extremwerte unter Nebenbedingungen** **(4 Punkte)**
   Bestimmen Sie das Extremum der Funktion $f(x, y, z) = (x-1)^2 + y^2 + z^2$ unter der Nebenbedingung $x + y - z = 0$.
   Die Art der Extremstelle (Minimum, Maximum, Sattelpunkt) soll *nicht* untersucht werden.

3. **Integralsätze von Gauß und Stokes** **(15 Punkte)**
   Gegeben sei das Vektorfeld
   $$\underline{A}(x, y, z) = \begin{pmatrix} y \\ -x \\ \lambda z \end{pmatrix} \quad ,$$
   wobei $\lambda \in \mathbb{R}$ eine Konstante ist.
   (a) Berechnen Sie die Divergenz des Vektorfeldes $\underline{A}$.
   (b) Berechnen Sie explizit den Fluß des Vektorfeldes $\underline{A}$ durch die Oberfläche eines Zylinders mit Radius R und Höhe H, der um die z-Achse zentriert ist $(0 \leq z \leq H)$.
   (c) Geben Sie den Integralsatz von Gauß *allgemein* an! (Formel und kurze Erläuterung)
   (d) Verifizieren Sie den Integralsatz von Gauß für das Vektorfeld $\underline{A}$ und den in Teilaufgabe (b) definierten Zylinder.
   (e) Berechnen Sie die Rotation des Vektorfeldes $\underline{A}$.
   (f) Berechnen Sie explizit das Linienintegral $\oint \underline{A} \cdot \mathrm{d}\underline{r}$ über den Rand einer Kreisscheibe mit Radius R um die z-Achse bei $z = h$.
   (g) Geben Sie den Integralsatz von Stokes *allgemein* an! (Formel und kurze Erläuterung)
   (h) Verifizieren Sie den Integralsatz von Stokes für das Vektorfeld $\underline{A}$ und die in Teilaufgabe (f) definierte Kreisscheibe.

4. **Differentialgleichungen I** **(8 Punkte)**
   Bestimmen Sie jeweils die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichungen:
   (a) $xy' = 4y + x^5$
   (b) $y' = 5y - x$
   (c) $y' = \dfrac{x^2 + x^4}{\cos y}$
   (d) $y' = -\dfrac{2xe^y + y\cos(xy)}{x^2e^y + x\cos(xy)}$

Rückseite beachten! ⟶

5. **Differentialgleichungen II: Elektromagnetischer Schwingkreis** **(10 Punkte)**
Eine interessante Realisierung des gedämpften harmonischen Oszillators ist der elektromagnetische Schwingkreis, bestehend aus einem Ohmschen Widerstand R, einer Spule mit der Induktivität L und einem Kondensator mit der Kapazität C.



Der fließende Strom $I(t)$ genügt der Differentialgleichung

$$L\ddot{I} + R\dot{I} + \frac{I}{C} = 0 \quad . \tag{1}$$

(a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Schwingungsgleichung (1). Beachten Sie die zu treffenden Fallunterscheidungen!

(b) Skizzieren Sie für $R^2 < 4L/C$ den Verlauf der Funktion $I(t)$.

Nun wird zusätzlich eine Wechselspannungsquelle mit der Frequenz Ω in den Schwingkreis eingebaut. In diesem Fall lautet die Differentialgleichung für den Strom

$$L\ddot{I} + R\dot{I} + \frac{I}{C} = U_0\Omega\cos(\Omega t) \quad , \tag{2}$$

wobei U_0 und Ω Konstanten sind.

(c) Bestimmen Sie für $R^2 < 4L/C$ die allgemeine Lösung der Schwingungsgleichung (2). Verwenden Sie dabei zum Auffinden einer partikulären Lösung $I_p(t)$ der inhomogenen Differentialgleichung den Ansatz

$$I_p(t) = a\sin(\Omega t) + b\cos(\Omega t)$$

mit Konstanten $a, b \in \mathbb{R}$.

(d) Die in Teilaufgabe (c) ermittelte partikuläre Lösung läßt sich auch in der Form

$$I_p(t) = A\sin(\Omega t - \Phi)$$

darstellen. Zeigen Sie: Die Amplitude A und der Tangens des Phasenwinkels Φ sind durch

$$A = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \left(\Omega L - \frac{1}{\Omega C}\right)^2}} \quad \text{und} \quad \tan\Phi = \frac{\Omega L - \frac{1}{\Omega C}}{R}$$

gegeben.

Punkte	40 – 35	34.5 – 30	29.5 – 25	24.5 – 20	19.5 – 0
Note	1	2	3	4	5