



Fragen zu den Übungsaufgaben:

Sven Simon, Raum A317, Tel. 391-5187, sven.simon@tu-bs.de
Joachim Müller, Raum A225, Tel. 391-5183, joa.mueller@tu-bs.de

43. Ungedämpfter harmonischer Oszillator

Die Bewegungsgleichung eines ungedämpften harmonischen Oszillators lautet

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0 \quad ; \quad x = x(t) \quad , \quad (1)$$

wobei ω_0 die Eigenfrequenz des Systems bezeichnet.

- (a) Die allgemeine Lösung von Gl. (1) läßt sich sowohl durch

$$x(t) = a \cos(\omega_0 t) + b \sin(\omega_0 t)$$

als auch durch

$$x(t) = A e^{i\omega_0 t} + B e^{-i\omega_0 t} \quad (2)$$

darstellen, wobei die Konstanten a, b, A und B komplex sind (mehr dazu in den folgenden Teilaufgaben). Rechnen Sie durch Einsetzen nach, daß beide Darstellungen wirklich Lösungen von Gl. (1) sind.

- (b) Drücken Sie die Koeffizienten A, B durch a, b aus.
(c) Die Anfangswerte (darunter versteht man vorgegebene Werte für $x(t)$ und $\dot{x}(t)$ für einen festen Zeitpunkt $t = t_0$) sind in der Regel reell, da $x(t)$ eine Ortskoordinate und $\dot{x}(t)$ die Geschwindigkeit ist. Folgern Sie aus $x(t = 0) = x_0$ und $\dot{x}(t = 0) = v_0$ mit reellen Werten x_0 und v_0 , daß $A = \bar{B}$ gilt (d.h. daß A komplex konjugiert zu B ist). Was ergibt sich durch Einarbeiten dieser Bedingung in Gl. (2)?
(d) Die (allgemeine) reelle Lösung von Gl. (1) läßt sich außerdem durch

$$x(t) = X \cos(\omega_0 t + \phi) \quad (3)$$

darstellen. Drücken Sie die reellen Konstanten X und ϕ durch a und b aus.

- (e) Rechnen Sie nach, daß die Darstellung

$$x(t) = \operatorname{Re}(\hat{x} e^{i\omega_0 t})$$

mit komplexer Amplitude $\hat{x}$ zu Gl. (3) gleichwertig ist.

Rückseite beachten! →

44. Harmonischer Oszillator II: Erzwungene Schwingungen

Die Differentialgleichung eines gedämpften harmonischen Oszillators, auf den eine zur Geschwindigkeit proportionale Reibungskraft wirkt, lautet

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0 \quad . \quad (4)$$

Dabei bezeichnet γ die Dämpfungskonstante.

- (a) Bestimmen Sie die Lösung der Differentialgleichung (4) für $x(t=0) = x_0$ und $\dot{x}(t=0) = v_0$. Beachten Sie hierbei die zu treffenden Fallunterscheidungen. Diskutieren Sie die Lösungen.
- (b) Betrachten Sie nun einen gedämpften harmonischen Oszillator, auf den zusätzlich eine externe Kraft $f(t)$ wirkt. Die Bewegungsgleichung lautet dann

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f(t) \quad . \quad (5)$$

Bestimmen Sie für $0 < \gamma < \omega_0$ (dies ist der sog. Schwingfall) die allgemeine Lösung von Gl. (5) für folgende rechte Seiten:

- i. $f(t) = a = \text{const}$
- ii. $f(t) = f_0 \text{Re}(e^{i\Omega t})$ mit $f_0, \Omega \in \mathbb{R}$
- iii. $f(t) = f_0 [\sin(\Omega t) + 2 \cos(2\Omega t)]$

Versuchen Sie im Fall (i) eine partikuläre Lösung der Gleichung zu erraten!

Im Fall (ii) bietet sich zum Auffinden einer partikulären Lösung der Ansatz

$$x(t) = \text{Re}(\hat{x}_0 e^{i\Omega t}) \quad \text{mit} \quad \hat{x}_0 \in \mathbb{C}$$

an. Rechnen Sie mit komplexen Funktionen, d.h. lassen Sie die Bildung des Realteils weg. Bestimmen Sie Amplitude und Phase der partikulären Lösung als Funktion von Ω , ω_0 und γ . Skizzieren Sie $|\hat{x}_0|$ und die Phasenverschiebung als Funktion von Ω .

Im Fall (iii) soll zum Auffinden einer partikulären Lösung der Ansatz

$$x(t) = a \sin(\Omega t) + b \cos(\Omega t) + c \sin(2\Omega t) + d \cos(2\Omega t)$$

mit Konstanten a, b, c, d verwendet werden.

- (c) Überlegen Sie sich anschließend, wie man die Lösung für (iii) auf (ii) zurückführen kann. Hier ist keine Rechnung verlangt, sondern eine gute Begründung Ihrer Antwort.
- (d) Bestimmen Sie für den Fall (i) die Lösung der Schwingungsgleichung (5) für die Anfangsbedingungen $x(t=0) = x_0$, $\dot{x}(t=0) = 0$.
- (e) Geben Sie für den Fall (ii) die reelle Lösung der Schwingungsgleichung für die Anfangsbedingungen $x(t=0) = x_0$, $\dot{x}(t=0) = 0$ an.