INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

Prof. Dr. U. Motschmann
Dipl.-Phys. S. Simon

Physikalische Rechenmethoden I — WiSe 2005/2006

11. Übungsblatt — Besprechung am Mittwoch, d. 18.01.06

Fragen zu den Übungsaufgaben:
Sven Simon, Raum A317, Tel. 391-5187, sven.simon@tu-bs.de
Joachim Müller, Raum A225, Tel. 391-5183, joa.mueller@tu-bs.de

36. **Integralsatz von Stokes**
Es sei $F \subseteq \mathbb{R}^3$ eine beliebig geformte Fläche und (F) deren Randkurve. Gegeben sei zudem ein Vektorfeld $\underline{A}(x,y,z)$. Dann besagt der Integralsatz von Stokes

$$\int_F \operatorname{rot} \underline{A} \cdot \mathrm{d}\underline{O} = \int_{(F)} \underline{A} \cdot \mathrm{d}\underline{r} \quad .$$

Für einige Beispiele soll diese Formel explizit nachgerechnet werden:

(a) für das Vektorfeld

$$\underline{A} = \left(\frac{4}{3}x - 2y, 3y - x, 0 \right)$$

und die Ellipse

$$\mathcal{E} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \quad \middle| \quad \left(\frac{x}{3}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 \leq 1 \quad \text{und} \quad z = 0 \right\} \quad ,$$

(b) sowie für das Vektorfeld $\underline{A} = (y - x, -y, 1)$ und ein Dreieck mit den Ecken $(0,0,0)$, $(1,0,0)$ und $(0,1,0)$.

37. **Flächenberechnung mit dem Satz von Stokes**
Betrachten Sie das Vektorfeld

$$\underline{F} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$$

und eine beliebige, geschlossene Kurve C in der (x,y)-Ebene.

(a) Zeigen Sie, daß durch das Linienintegral $\oint_C \underline{F} \cdot \mathrm{d}\underline{r}$ der Inhalt der orientierten, von C eingeschlossenen Fläche gegeben ist.

(b) Verifizieren Sie diese Aussage für die Kurve

$$C : [0, 2\pi[\ni t \mapsto \underline{r}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \frac{1}{2}\sin(2t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

(c) und für ein Dreieck, dessen einer Eckpunkt im Ursprung liege.

38. **Coulomb-Potential**
Das Coulomb-Potential einer Punktladung q am Ort $\underline{0}$ lautet

$$\Phi(\underline{r}) = \frac{\alpha}{r} \quad \text{mit} \quad \alpha = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \quad \text{und} \quad r = |\underline{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad .$$

(a) Stellen Sie die Taylorreihe von $\Phi(\underline{r})$ um den Punkt $\underline{r} = \underline{r}_0 \neq \underline{0}$ bis zur zweiten Ordnung auf.

(b) Geben Sie das zugehörige elektrische Feld $\underline{E} = -\nabla\Phi$ an.

(c) Skizzieren Sie die Feldlinien und die Äquipotentialflächen.

(d) Ermitteln Sie $\triangle\Phi$ für $r > 0$ und verifizieren Sie den Gaußschen Satz für das Vektorfeld $\underline{E}$ und die Gebiete $\mathcal{K}_1 = \{\underline{r} \,|\, 0 < \epsilon \leq r \leq R\}$ bzw. $\mathcal{K}_2 = \{\underline{r} \,|\, r \leq R\}$. Geben Sie $\triangle\Phi$ bzw. $\operatorname{div}\underline{E}$ für beliebige $\underline{r}$ an.