INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

Prof. Dr. U. Motschmann
Dipl.-Phys. S. Simon

PHYSIKALISCHE RECHENMETHODEN I — WISE 2005/2006

10. Übungsblatt — Besprechung am Mittwoch, d. 11.01.06

Fragen zu den Übungsaufgaben:
Sven Simon, Raum A317, Tel. 391-5187, sven.simon@tu-bs.de
Joachim Müller, Raum A225, Tel. 391-5183, joa.mueller@tu-bs.de

33. **Kurvenintegrale, konservative Vektorfelder**
Wir betrachten die Vektorfelder

$$\underline{A} = \left(4y^2 + 3z, 8xy - 8z^3, -24yz^2 + 3x\right) \quad \text{und} \quad \underline{B} = \left(xz + 3x, 3yz, y^2 + z^4\right)$$

(a) Berechnen Sie die Wegintegrale $\int \underline{A} \cdot \mathrm{d}\underline{r}$ bzw. $\int \underline{B} \cdot \mathrm{d}\underline{r}$ zwischen den Punkten $(0,0,0)$ und $(1,0,1)$, und zwar längs der Wege

- $C_1 : (0,0,0) \to (1,0,0) \to (1,0,1)$
- $C_2 : (0,0,0) \to (1,0,1)$ mit $z = x$
- $C_3 : (0,0,0) \to (1,0,1)$ mit $z = x^2$.

(b) Ein Vektorfeld, dessen Rotation verschwindet, nennt man *konservativ*. Zeigen Sie: Das Vektorfeld $\underline{A}$ ist konservativ, das Feld $\underline{B}$ dagegen nicht. Skizzieren Sie das Vektorfeld $\operatorname{rot}\underline{B}$.

Bevor wir uns weiter mit diesem Beispiel beschäftigen, wollen wir in den folgenden Aufgabenteilen einige allgemeine Eigenschaften konservativer Felder kennenlernen:

(c) Zeigen Sie allgemein, daß für ein konservatives Vektorfeld $\underline{V}$ stets eine skalare Funktion $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft $\underline{V} = \nabla\Phi$ existiert. Die Funktion Φ ist ein *Potential* des Vektorfeldes $\underline{V}$.

(d) Wir betrachten wiederum ein konservatives Vektorfeld $\underline{V}$ und eine beliebige Kurve $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ mit Startpunkt $\underline{r}_1$ und Endpunkt $\underline{r}_2$. Zeigen Sie:

$$\int_\gamma \underline{V} \cdot \mathrm{d}\underline{r} = \Phi\left(\underline{r}_2\right) - \Phi\left(\underline{r}_1\right) \quad . \tag{1}$$

Das Potential Φ wurde in Teil (b) definiert.
Was folgt aus Gl. (1) für eine geschlossene Kurve ($\underline{r}_1 = \underline{r}_2$)?

Nun wollen wir die Ergebnisse von Teil (c) und (d) auf das konkrete Beispiel anwenden:

(e) Bestimmen Sie für das Vektorfeld $\underline{A}$ ein geeignetes Potential Φ. Bestätigen Sie damit Gl. (1) für die in Teil (a) angegebenen Kurvenintegrale.

34. **Integralsatz von Gauß**
Es sei $V \subseteq \mathbb{R}^3$ ein beliebig geformtes Volumen und (V) dessen Oberfläche. Gegeben sei zudem ein Vektorfeld $\underline{A}(x,y,z)$. Dann besagt der Integralsatz von Gauß:

$$\int_V \operatorname{div}\underline{A}\,\mathrm{d}V = \int_{(V)} \underline{A} \cdot \mathrm{d}\underline{O} \quad .$$

Für einige Beispiele soll diese Formel explizit nachgerechnet werden:

(a) für das Vektorfeld $\underline{A} = (ax, by, cz)$ mit Konstanten $a, b, c \in \mathbb{R}$ und eine Kugel um den Ursprung mit Radius R,

(b) für das Vektorfeld $\underline{A} = (xy, yz, -z)$ und die geschlossene Oberfläche der Halbkugel mit $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ und $z \geq 0$,

(c) sowie für das Vektorfeld

$$\underline{A} = \left(x\,e^{-a\sqrt{x^2+y^2}} - by, y\,e^{-a\sqrt{x^2+y^2}} + bx, \sin\left(\frac{\pi z}{2d}\right)\right)$$

und einen Zylinder um die z-Achse mit Radius R und mit Höhe von $-d$ bis $+d$.

Rückseite beachten! ⟶

35. **Greensche Formel**

In Aufgabe 34 haben Sie den Integralsatz von Gauß kennengelernt. Aus diesem Satz wollen wir nun eine weitere wichtige Identität herleiten:

Es seien Φ_1 und Φ_2 zwei skalare Felder, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ ein Volumen und (Ω) dessen Oberfläche. Dann gilt:

$$\int_{(\Omega)} \left(\Phi_1 \nabla \Phi_2 - \Phi_2 \nabla \Phi_1\right) \cdot \mathrm{d}\underline{O} = \int_{\Omega} \left(\Phi_1 \triangle \Phi_2 - \Phi_2 \triangle \Phi_1\right) \mathrm{d}V \quad .$$

Versuchen Sie diese Formel zu beweisen.