



Fragen zu den Übungsaufgaben:

Sven Simon, Raum A317, Tel. 391-5187, sven.simon@tu-bs.de
Joachim Müller, Raum A225, Tel. 391-5183, joa.mueller@tu-bs.de

30. Differentiation vektorwertiger Funktionen

In dieser Aufgabe betrachten wir vektorwertige Funktionen der Form $\underline{A}(t)$ mit $t \in \mathbb{R}$. Eine solche Funktion beschreibt z.B. die Trajektorie (den Ortsvektor) eines Teilchens als Funktion der Zeit.

(a) Beweisen Sie die folgenden Differentiationsregeln für vektorwertige Funktionen $\underline{A}(t)$, $\underline{B}(t)$:

- i. $\frac{d}{dt} [\underline{A} \cdot \underline{B}] = \frac{d\underline{A}}{dt} \cdot \underline{B} + \underline{A} \cdot \frac{d\underline{B}}{dt}$
- ii. $\frac{d}{dt} [\underline{A} \times \underline{B}] = \frac{d\underline{A}}{dt} \times \underline{B} + \underline{A} \times \frac{d\underline{B}}{dt}$
- iii. $\underline{A} \cdot \frac{d\underline{A}}{dt} = |\underline{A}| \frac{d|\underline{A}|}{dt}$

(b) Wir betrachten ein Teilchen, das sich mit der Geschwindigkeit $\underline{v}(t)$ bewegt. Der Betrag der Geschwindigkeit soll konstant sein, also

$$v \equiv |\underline{v}| = \text{const} \quad .$$

Zeigen Sie, daß dann die Beschleunigung $\underline{a} = \dot{\underline{v}}$ senkrecht auf $\underline{v}$ steht.

31. Differentialoperatoren I

In dieser Aufgabe soll das Rechnen mit den Differentialoperatoren Gradient, Divergenz, Rotation und Laplace geübt werden.

(a) Berechnen Sie jeweils den Gradienten der folgenden skalaren Felder:

$$A(x, y, z) = 8x^2y^3 - 4xyz^2 \quad ; \quad B(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 \quad ; \quad C(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad .$$

(b) Berechnen Sie jeweils die Divergenz der folgenden Vektorfelder:

$$\underline{A}(x, y, z) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad ; \quad \underline{B}(x, y, z) = \begin{pmatrix} x^2y - 4x \\ x^2y \\ 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \underline{C}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 4x^2 + 8xy + z \\ 4x^2 + y \\ xz + yz + z^2 \end{pmatrix} \quad .$$

Wo verschwindet die Divergenz des Vektorfeldes $\underline{B}$?

(c) Zeigen Sie, daß das Vektorfeld

$$\underline{A}(x, y, z) = \begin{pmatrix} yz - \sin(x - y) \\ xz + \sin(x - y) + \cos(z^2 + y) \\ xy + 2z \cos(z^2 + y) \end{pmatrix}$$

wirbelfrei ist.

(d) Es sei $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Berechnen Sie für $r \neq 0$ die folgenden Ausdrücke:

$$\Delta \left(\frac{1}{r} \right) \quad \text{und} \quad \Delta (\ln r) \quad .$$

Dabei ist die Wirkung des Laplace-Operators Δ auf eine skalare Funktion $f(x, y, z)$ wie folgt definiert:

$$\Delta f = \text{div grad } f \quad .$$

(e) Gegeben sei das Vektorfeld

$$\underline{F}(\underline{r}) = \frac{1}{r^2} \Omega \times \underline{r}$$

mit einem konstanten Vektor Ω . Wählen Sie die z -Achse eines kartesischen Koordinatensystems in Richtung von Ω und geben Sie das Feld in kartesischen Koordinaten an. Skizzieren Sie das Feld in der Ebene $z = 0$. Berechnen Sie die Divergenz und die Rotation des Feldes.

Rückseite beachten! $\longrightarrow$

- (f) Es sei $\underline{B}(x, y, z)$ ein Vektorfeld und $C(x, y, z)$ ein skalares Feld. Berechnen Sie die Divergenz des Vektorfeldes

$$\underline{A}(x, y, z) = \underline{B} \times (\nabla C) \quad .$$

- (g) Es seien $\underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^3$ konstante Vektoren und $\underline{r} = (x, y, z)$. Wir betrachten die Vektorfelder

$$\underline{A}(\underline{r}) = (\underline{u} \cdot \underline{r}) \underline{v} \quad \text{und} \quad \underline{B}(\underline{r}) = \underline{u} \times (\underline{v} \times \underline{r}) \quad .$$

Zeigen Sie: $\text{rot } \underline{A} = \text{rot } \underline{B}$. Welche Bedingung müssen $\underline{u}$ und $\underline{v}$ erfüllen, damit die Rotation der Vektorfelder verschwindet?

32. Differentialoperatoren II

Es sei $\underline{A}(x, y, z)$ ein Vektorfeld und $\phi(x, y, z)$ eine skalare Funktion. Zeigen Sie:

- (a) $\text{div}(\phi \underline{A}) = \phi \text{div} \underline{A} + \underline{A} \cdot \text{grad } \phi$
- (b) $\text{rot}(\phi \underline{A}) = \phi \text{rot } \underline{A} + (\text{grad } \phi) \times \underline{A}$
- (c) Die Rotation eines Vektorfeldes ist quellenfrei: $\nabla \cdot (\nabla \times \underline{A}) = 0$.
- (d) Der Gradient eines skalaren Feldes ist wirbelfrei: $\nabla \times (\nabla \phi) = \underline{0}$.