INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

Prof. Dr. U. Motschmann
Dipl.-Phys. S. Simon

PHYSIKALISCHE RECHENMETHODEN I — WISE 2005/2006

8. Übungsblatt — Besprechung am Mittwoch, d. 14.12.05

Fragen zu den Übungsaufgaben:
Sven Simon, Raum A317, Tel. 391-5187, sven.simon@tu-bs.de
Joachim Müller, Raum A225, Tel. 391-5183, joa.mueller@tu-bs.de

28. **Vektorrechnung**
In dieser Aufgabe sollen einige Grundbegriffe wiederholt werden.

(a) Zeigen Sie: Die Elemente von $\mathcal{M} = \{(a_1, a_2), (b_1, b_2)\} \subseteq \mathbb{R}^2$ bilden genau dann eine Basis des $\mathbb{R}^2$, wenn gilt:

$$\det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \neq 0 \quad .$$

(b) Wir betrachten eine Menge von Vektoren des $\mathbb{R}^3$:

$$\mathcal{M} = \{(1,1,0), (-2,1,\lambda), (0,-1,-2)\} \quad .$$

- Zeigen Sie, daß die Elemente von $\mathcal{M}$ für $\lambda \neq 6$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden.
- Stellen Sie für $\lambda = 5$ den Vektor $\underline{a} = (2, 2, -1)$ als Linearkombination der Elemente von $\mathcal{M}$ dar.
- Für welche Werte von $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ bildet selbst die Menge von vier Vektoren

$$\tilde{\mathcal{M}} = \mathcal{M} \cup \{(\lambda, 8, \mu)\}$$

kein Erzeugendensystem des $\mathbb{R}^3$?

(c) Es sei $\{\underline{b}_1, \underline{b}_2\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^2$.

- Zeigen Sie: Dann bilden auch

$$\underline{c}_1 = \sqrt{3}\underline{b}_1 + \underline{b}_2 \quad \text{und} \quad \underline{c}_2 = -\underline{b}_1 + \sqrt{3}\underline{b}_2$$

eine Basis des $\mathbb{R}^2$.
- Ein Vektor $\underline{v}$ besitzt bezüglich der Basis $\{\underline{b}_1, \underline{b}_2\}$ die Koordinaten (v_1, v_2), d.h. es gilt

$$\underline{v} = v_1\underline{b}_1 + v_2\underline{b}_2 \quad .$$

Bestimmen Sie daraus die Koordinaten von $\underline{v}$ bezüglich der Basis $\{\underline{c}_1, \underline{c}_2\}$.

(d) Zwei Vektoren $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ und $\underline{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ des $\mathbb{R}^n$ stehen aufeinander senkrecht, wenn $\underline{x} \cdot \underline{y} = \sum_{i=1}^n x_i y_i = 0$ gilt. Gegeben seien nun n Vektoren $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n \in \mathbb{R}^n \setminus \{\underline{0}\}$, die paarweise aufeinander senkrecht stehen. Zeigen Sie: $\{\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n\}$ ist eine Basis des $\mathbb{R}^n$.

(e) Finden Sie vier linear abhängige Vektoren in $\mathbb{R}^3$, von denen je drei linear unabhängig sind.

(f) Wir wollen nun die Überlegung von Teil (e) verallgemeinern: Es seien $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_n \in \mathbb{R}^n$ verschiedene linear abhängige Vektoren, von denen je $n-1$ linear unabhängig sind.

- Zeigen Sie, daß man den Nullvektor als Linearkombination $\underline{0} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \underline{x}_i$ derart darstellen kann, daß sämtliche Koeffizienten α_i von Null verschieden sind.
- Zeigen Sie außerdem: Gilt $\underline{0} = \sum_{i=1}^n \beta_i \underline{x}_i$ auch für $\beta_1, \ldots, \beta_n \in \mathbb{R}$, so gibt es eine reelle Zahl γ mit $\beta_i = \gamma\alpha_i$ für $i = 1, \ldots, n$.

Rückseite beachten! ⟶

29. **Klassifizierung einer linearen Abbildung**

Es sei $\underline{w} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\underline{0}\}$ fest vorgegeben. Wir definieren eine Abbildung $F_{\underline{w}} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ wie folgt:

$$F_{\underline{w}}\left(\underline{x}\right) = \underline{x} - 2\frac{\underline{x} \cdot \underline{w}}{\underline{w} \cdot \underline{w}}\,\underline{w} \quad . \tag{1}$$

(a) Zeigen Sie: Die Abbildung $F_{\underline{w}}$ ist linear, d.h. es gilt

$$F_{\underline{w}}\left(\underline{x} + \underline{y}\right) = F_{\underline{w}}\left(\underline{x}\right) + F_{\underline{w}}\left(\underline{y}\right) \quad \text{und} \quad F_{\underline{w}}\left(\lambda\underline{x}\right) = \lambda F_{\underline{w}}\left(\underline{x}\right)$$

für $\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^3$ und $\lambda \in \mathbb{R}$.

(b) Zeigen Sie: Für alle $\underline{x} \in \mathbb{R}^3$ gilt

$$F_{\underline{w}}\left(F_{\underline{w}}\left(\underline{x}\right)\right) = \underline{x} \quad .$$

Eine Abbildung mit dieser Eigenschaft nennt man *Involution*.

(c) Zeigen Sie: Die Abbildung $F_{\underline{w}}$ ist *unitär*, d.h. es gilt

$$F_{\underline{w}}\left(\underline{x}\right) \cdot F_{\underline{w}}\left(\underline{y}\right) = \underline{x} \cdot \underline{y}$$

für alle $\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^3$. Wie ist diese Bedingung anschaulich zu interpretieren (Stichworte: Längen und Winkel)?

(d) Bestimmen Sie alle $\underline{x} \in \mathbb{R}^3$, für die

$$F_{\underline{w}}\left(\underline{x}\right) = \underline{x}$$

gilt. Vektoren, die diese Beziehung erfüllen, bezeichnet man als *Eigenvektoren* der Abbildung $F_{\underline{w}}$ zum *Eigenwert* 1.

Bestimmen Sie zudem die Eigenvektoren zum Eigenwert -1, d.h. alle $\underline{x} \in \mathbb{R}^3$, die der Bedingung

$$F_{\underline{w}}\left(\underline{x}\right) = -\underline{x}$$

genügen.

(e) Wir wollen nun die Ergebnisse der Teilaufgaben (a)-(d) zusammenfassen: Versuchen Sie anschaulich zu beschreiben, wie die Abbildung $F_{\underline{w}}$ auf einen *beliebigen* Vektor $\underline{x} \in \mathbb{R}^3$ wirkt. Begründen Sie Ihre Vermutung anhand einer Skizze.

(f) Es seien nun $\underline{x}$ und $\underline{y}$ verschiedene Vektoren gleicher Länge. Zeigen Sie: Es läßt sich stets eine Abbildung $F_{\underline{w}}$ von der Form (1) angeben, die den Bedingungen

$$F_{\underline{w}}\left(\underline{x}\right) = \underline{y} \quad \text{und} \quad F_{\underline{w}}\left(\underline{y}\right) = \underline{x}$$

genügt. Von Interesse ist insbesondere die geeignete Wahl des Vektors $\underline{w}$.