INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

Prof. Dr. U. Motschmann
Dipl.-Phys. S. Simon

PHYSIKALISCHE RECHENMETHODEN I — WISE 2005/2006

7. Übungsblatt — Besprechung am Mittwoch, d. 07.12.05

Fragen zu den Übungsaufgaben:
Sven Simon, Raum A317, Tel. 391-5187, sven.simon@tu-bs.de
Joachim Müller, Raum A225, Tel. 391-5183, joa.mueller@tu-bs.de

24. **Volumenintegrale I: Wellenfunktion des Wasserstoffatoms**
Im Grundzustand des Wasserstoffatoms wird die Aufenthaltswahrscheinlichkeit des Elektrons durch die Funktion

$$f(x,y,z) = N \exp\left(-\frac{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{a_0}\right)$$

beschrieben, wobei der Bohrsche Radius a_0 eine Konstante ist. Bestimmen Sie die Normierungskonstante N, so daß die Bedingung

$$\int_{\mathbb{R}^3} f(x,y,z)\,\mathrm{d}V = 1$$

erfüllt ist (Kugelkoordinaten benutzen!). Wie ist diese Bedingung physikalisch zu interpretieren?

25. **Volumenintegrale II: Trägheitsmomente eines Ellipsoids**
Durch die Menge

$$\mathcal{E} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1\right\}$$

wird ein Ellipsoid mit den Halbachsen a, b und c definiert. Berechnen Sie die Gesamtmasse eines Ellipsoids mit konstanter Massendichte ρ_0 sowie dessen *Hauptträgheitsmomente*. Diese sind durch

$$\begin{aligned} T_{11} &= \rho_0 \int_{\mathcal{E}} \mathrm{d}V\ \left(y^2+z^2\right) \quad ; \\ T_{22} &= \rho_0 \int_{\mathcal{E}} \mathrm{d}V\ \left(x^2+z^2\right) \quad ; \\ T_{33} &= \rho_0 \int_{\mathcal{E}} \mathrm{d}V\ \left(x^2+y^2\right) \end{aligned}$$

definiert. Geben Sie zudem eine Formel zur Berechnung der Oberfläche des Ellipsoids an.
Hinweis: Eine mögliche Parametrisierung für die zu berechnenden Integrale ist

$$\begin{aligned} x &= a\,s\,\sin\theta\,\cos\phi \\ y &= b\,s\,\sin\theta\,\sin\phi \\ z &= c\,s\,\cos\theta \quad . \end{aligned}$$

Überlegen Sie sich zunächst die Definitionsbereiche für die Koordinaten s, θ und ϕ.

26. **Volumenintegrale III: Kugel mit inhomogener Massendichte**
Wir betrachten eine Kugel $\mathcal{K}$ um den Ursprung mit Radius R, deren Massendichte in Kugelkoordinaten $(x = r\sin\theta\cos\phi, y = r\sin\theta\sin\phi, z = r\cos\theta)$ als

$$\rho = \rho_0\left(1 + \alpha\cos\theta + \beta\cos^2\theta\right)$$

geschrieben werden kann. Mit ρ_0, α und β werden Konstanten bezeichnet.

(a) Berechnen Sie die Gesamtmasse M der Kugel.
(b) Berechnen Sie die Koordinaten des Schwerpunkts S der Kugel. Diese sind durch

$$x_s = \frac{1}{M}\int_{\mathcal{K}} x\rho\,\mathrm{d}V \quad ; \quad y_s = \frac{1}{M}\int_{\mathcal{K}} y\rho\,\mathrm{d}V \quad ; \quad z_s = \frac{1}{M}\int_{\mathcal{K}} z\rho\,\mathrm{d}V$$

definiert.

Rückseite beachten! ⟶

27. **Volumenintegrale IV: Schwerpunkt und Trägheitsmomente eines Zylinders**
Durch die Menge

$$\mathcal{Z} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad \middle| \quad 0 \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq R \quad ; \quad -\frac{H}{2} \leq z \leq \frac{H}{2} \right\}$$

wird ein Zylinder um die z-Achse mit Radius R und Höhe H definiert. Der Zylinder habe die homogene Massendichte ρ_0. Berechnen Sie die Gesamtmasse des Zylinders, die Koordinaten des Schwerpunkts sowie die Hauptträgheitsmomente.