INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

Prof. Dr. U. Motschmann
Dipl.-Phys. S. Simon

PHYSIKALISCHE RECHENMETHODEN I — WISE 2005/2006

6. Übungsblatt — Besprechung am Mittwoch, d. 30.11.05

Fragen zu den Übungsaufgaben:
Sven Simon, Raum A317, Tel. 391-5187, sven.simon@tu-bs.de
Joachim Müller, Raum A225, Tel. 391-5183, joachim-mueller@online.de

21. **Flächenintegrale I: Schwerpunkt und Trägheitsmomente einer dünnen Platte**
Betrachten Sie eine dünne Platte, deren Form durch die Grenzen $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$ und $y = x^3$ gegeben ist. Die Massendichte (Masse pro Fläche) sei $\rho(x, y) = xy^2$.

   (a) Berechnen Sie die Gesamtmasse M der Platte.

   (b) Bestimmen Sie die Koordinaten (x_s, y_s) des Massenschwerpunkts der Platte. Diese sind durch
$$x_s = \frac{1}{M}\int x\rho(x,y)\,\mathrm{d}F \quad \text{und} \quad y_s = \frac{1}{M}\int y\rho(x,y)\,\mathrm{d}F$$
definiert.

   (c) Bei der Berechnung der kinetischen Energie eines Körpers, der um eine feste Drehachse rotiert, kommt dem sog. *Trägheitsmoment* T eine entscheidende Bedeutung zu. Die kinetische Energie der Rotation E_{rot} kann damit aus
$$E_{\text{rot}} = \frac{1}{2}T\omega^2$$
bestimmt werden, wobei ω die Winkelgeschwindigkeit der Drehung ist.
Das Trägheitsmoment eines Massenelementes $\mathrm{d}m$ im Abstand r von der Drehachse ist $\mathrm{d}T = r^2\mathrm{d}m$. Wie groß ist das Trägheitsmoment der Platte, wenn die Drehachse die x-Achse (T_x), die y-Achse (T_y) oder die z-Achse (T_z) ist? Geben Sie das Trägheitsmoment in Vielfachen der Masse an.

22. **Flächenintegrale II**
Wir betrachten folgende Beispiele:

   (a) Wir definieren eine Teilmenge des $\mathbb{R}^2$ durch
$$\mathcal{M} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad | \quad x \geq 1\,;\, y \geq 1\,;\, x + y \leq 3\right\} \quad .$$
Skizzieren Sie $\mathcal{M}$ und berechnen Sie das Flächenintegral
$$\int_{\mathcal{M}} \frac{1}{(x+y)^3}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \quad .$$

   (b) Berechnen Sie durch Integration die von der Ellipse
$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$
eingeschlossene Fläche.

   (c) Berechnen Sie die Fläche der Erde, die zwischen den beiden Wendekreisen liegt.

Rückseite beachten! ⟶

23. **Flächenintegrale III: Ellipsoid mit inhomogener Ladungsdichte**
Durch die Menge

$$\mathcal{E} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad \middle| \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \right\}$$

wird ein Ellipsoid mit den Halbachsen a, b und c beschrieben, dessen Zentrum im Koordinatenursprung liegt.

(a) Führen Sie geeignete Koordinaten zur Beschreibung der *Oberfläche* des Ellipsoids ein. Gehen Sie dabei von den in Aufgabe 20 behandelten Kugelkoordinaten aus.

(b) Wir beschränken uns jetzt auf einen Spezialfall:

$$a = b \quad .$$

Die Oberfläche des Ellipsoids trage die Ladungsdichte (Ladung pro Fläche)

$$\sigma(x, y, z) = \frac{e}{a\sqrt{a^2 + c^2 - (x^2 + y^2 + z^2)}} \quad .$$

Mit $e = 1.6 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$ wird dabei die Elementarladung bezeichnet. Zeigen Sie: Die Gesamtladung Q auf der Oberfläche des Ellipsoids ist

$$Q = 4\pi e \quad .$$