INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

Prof. Dr. U. Motschmann
Dipl.-Phys. S. Simon

PHYSIKALISCHE RECHENMETHODEN I — WISE 2005/2006

5. Übungsblatt — Besprechung am Mittwoch, d. 23.11.05

**Fragen zu den Übungsaufgaben:**
Sven Simon, Raum A317, Tel. 391-5187, sven.simon@tu-bs.de
Joachim Müller, Raum A225, Tel. 391-5183, joachim-mueller@online.de

17. **Kettenregel und partielle Ableitungen**
Gegeben seien zwei Koordinatensysteme $(x, y, z)$ und $(\lambda, \mu, \nu)$. Zeigen Sie, daß aus $x = \lambda$ *nicht* $\partial/\partial x = \partial/\partial\lambda$ folgt. Betrachten Sie dazu die Koordinatentransformation $(x, y, z) \mapsto (\lambda, \mu, \nu)$ mit

$$\lambda = x \quad , \quad \mu = ax + by + cz \quad , \quad \nu = Ax + By + Cz \quad \text{und} \quad \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b & c \\ A & B & C \end{pmatrix} \neq 0$$

und drücken Sie das vollständige Differential

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial\lambda}\mathrm{d}\lambda + \frac{\partial f}{\partial\mu}\mathrm{d}\mu + \frac{\partial f}{\partial\nu}\mathrm{d}\nu$$

einer Funktion $f(\lambda, \mu, \nu)$ in den Koordinaten $(x, y, z)$ aus, indem Sie die Differentiale der Koordinatenfunktionen einsetzen. Warum muß man $\det(\ldots) \neq 0$ fordern?

18. **Äquivalenz von Kurven**
Zeigen Sie, daß durch die Parametrisierungen

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \quad ; \quad 0 \leq t \leq \pi$$

und

$$\begin{pmatrix} x(s) \\ y(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -s \\ \sqrt{1-s^2} \end{pmatrix} \quad ; \quad -1 \leq s \leq +1$$

*dieselbe* Kurve beschrieben wird.

19. **Integration entlang einer Kurve**
In dieser Aufgabe soll die Berechnung von Linienintegralen geübt werden.

(a) Von der Spitze eines Turmes der Höhe $h$ wird ein Ball in horizontaler Richtung mit der Geschwindigkeit $v_0$ abgeworfen. Der Luftwiderstand wird nicht berücksichtigt. Die Bahnkurve als Funktion der Zeit ist dann durch

$$x(t) = v_0 t \quad ; \quad y(t) = h - \frac{g}{2}t^2$$

gegeben. Mit $g$ wird die Erdbeschleunigung bezeichnet. Berechnen Sie die Länge der Flugbahn, bis der Ball am Boden aufprallt.

(b) Durch die Parametrisierung

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t - \sin t \\ 1 - \cos t \end{pmatrix} \quad ; \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

wird eine *Zykloide* beschrieben. Skizzieren Sie den Verlauf der Kurve in der $(x, y)$-Ebene und berechnen Sie deren Länge.

(c) Verfahren Sie analog mit der *logarithmischen Spirale*

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{ct}\cos t \\ e^{ct}\sin t \end{pmatrix} \quad ; \quad c \neq 0 \quad ; \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

und der *Astroide (Sternkurve)*

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\cos^3 t \\ a\sin^3 t \end{pmatrix} \quad ; \quad a > 0 \quad ; \quad 0 \leq t \leq 2\pi \quad .$$

*Rückseite beachten!* ⟶

20. **Zylinder- und Kugelkoordinaten**

Im $\mathbb{R}^3$ betrachten wir eine Transformation von kartesischen Koordinaten $(x, y, z)$ auf einen neuen Satz von Koordinaten $(u, v, w)$. Als Beispiele seien gegeben:

- Transformation von kartesischen Koordinaten zu Zylinderkoordinaten:

$$\begin{aligned} x &= u \cos v \\ y &= u \sin v \\ z &= w \end{aligned}$$

- Transformation von kartesischen Koordinaten zu Kugelkoordinaten:

$$\begin{aligned} x &= u \sin v \cos w \\ y &= u \sin v \sin w \\ z &= u \cos v \end{aligned}$$

Machen Sie sich sowohl für Zylinder- als auch für Kugelkoordinaten die anschauliche Bedeutung der Koordinaten $(u, v, w)$ anhand einer Skizze klar. Geben Sie jeweils sinnvolle Definitionsbereiche für die Koordinaten $(u, v, w)$ an. Zudem soll für beide Koordinatentransformationen die sog. *Funktionaldeterminante*

$$\det \underline{\underline{J}} \equiv \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{pmatrix}$$

berechnet werden.