INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

Prof. Dr. U. Motschmann
Dipl.-Phys. S. Simon

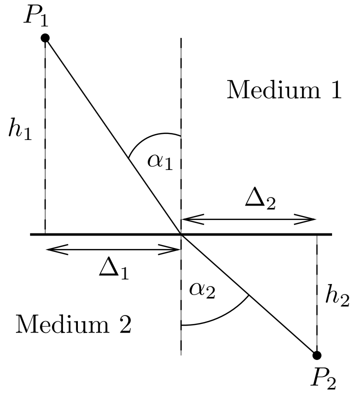
PHYSIKALISCHE RECHENMETHODEN I — WISE 2005/2006

4. Übungsblatt — Besprechung am Mittwoch, d. 16.11.05

Fragen zu den Übungsaufgaben:
Sven Simon, Raum A317, Tel. 391-5187, sven.simon@tu-bs.de
Joachim Müller, Raum A225, Tel. 391-5183, joachim-mueller@online.de

11. **Fermatsches Prinzip**
Das Fermatsche Prinzip besagt, daß sich ein Lichtstrahl zwischen zwei Raumpunkten stets so bewegt, daß die Laufzeit minimal wird. Aus diesem Prinzip sollen das Snelliussche Brechungsgesetz sowie das Reflexionsgesetz hergeleitet werden.

(a) Zur Herleitung des Brechungsgesetzes betrachte man untenstehende Skizze. Ein Lichtstrahl tritt vom Medium 1 mit Brechungsindex n_1 in das Medium 2 mit Brechungsindex n_2 ein. Gesucht ist der „zeitlich kürzeste“ Weg vom Punkt P_1 zum Punkt P_2. Bestimmen Sie dazu die Zeit, die das Licht benötigt, als Funktion von Δ_1 und Δ_2. Bestimmen Sie dann das Minimum dieser Funktion unter der Nebenbedingung $\Delta_1 + \Delta_2 = \text{const}$. Leiten Sie aus dem Ergebnis das Snelliussche Brechungsgesetz ab:
$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} = \frac{n_2}{n_1} \quad .$$



(b) Betrachten Sie nun einen vom Punkt P_1 ausgehenden Lichtstrahl, der an der Grenzfläche beider Medien reflektiert wird. Leiten Sie aus einer zu (a) analogen Überlegung das Reflexionsgesetz ab (*Einfallswinkel = Reflexionswinkel*).

12. **Taylor-Reihen I**
Entwickeln Sie die folgenden Funktionen jeweils in eine Taylor-Reihe um $x = 0$:

(a) $f(x) = \sin(x)$
(b) $f(x) = \cos(x)$
(c) $f(x) = \exp(x)$
(d) $f(x) = \sinh(x)$
(e) $f(x) = \cosh(x)$
(f) $f(x) = \arctan x \quad , \quad |x| < 1$
(g) $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2} \quad , \quad |x| < 1$
(h) $f(x) = \ln(1-2x) \quad , \quad |x| < \frac{1}{2}$

13. **Taylor-Reihen II: Tangentengleichungen**
Besitzt die Funktion
$$f(x) = \frac{x-3}{x+9} \quad ; \quad x > -9$$
Tangenten, die durch den Nullpunkt gehen? Wenn ja, geben Sie die Berührungspunkte und die Steigungen der Tangenten an.

Rückseite beachten! ⟶

14. **Taylor-Reihen III**
Entwickeln Sie die folgenden Funktionen jeweils in eine Potenzreihe bis zu Gliedern zweiter Ordnung:

(a) $f(x, y) = xy^2 + 2x^2 + 1$ um den Punkt $(1, 2)$,

(b) $f(x, y) = \frac{y^2}{x^3}$ um den Punkt $(1, 0)$.

15. **Regel von de l' Hospital**
Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte mit Hilfe der Regel von de l' Hospital:

$$\lim_{x \to 1} \frac{\exp\left(x^2\right) - \exp(x)}{x - 1} \quad \text{und} \quad \lim_{x \to 1} \frac{x \exp(x) - \exp(2x - 1)}{x(x - 1)^2} \quad .$$

16. **Existenz von Nullstellen**
Wir betrachten ein Polynom der Form

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$$

mit konstanten Koeffizienten a_j. Für die Koeffizienten möge gelten:

$$\sum_{j=0}^{n} \frac{a_j}{j + 1} = 0 \quad .$$

Begründen Sie: $f(x)$ besitzt im Intervall $0 < x < 1$ eine Nullstelle.