INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

Prof. Dr. U. Motschmann
Dipl.-Phys. S. Simon

PHYSIKALISCHE RECHENMETHODEN I — WISE 2005/2006

3. Übungsblatt — Besprechung am Mittwoch, d. 09.11.05

Fragen zu den Übungsaufgaben:
Sven Simon, Raum A317, Tel. 391-5187, sven.simon@tu-bs.de
Joachim Müller, Raum A225, Tel. 391-5183, joachim-mueller@online.de

6. **Impliziertes Differenzieren**
Bestimmen Sie für die folgenden Ausdrücke die Ableitung $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$. Es sei jeweils $y = y(x)$.
   (a) $x^y = y^x$
   (b) $xy^3 - 3x^2 = xy + 5$
   (c) $\exp(xy) + y \ln x = \cos(2x)$.

7. **Partielle Ableitungen I**
Es sei das skalare Feld
$$\phi(x, y, z) = \frac{x^3 y^4}{z^2} + \left(x^2 - y^2\right)^5$$
gegeben. Berechnen Sie die partiellen Ableitungen
$$\frac{\partial \phi}{\partial x} \ , \ \frac{\partial \phi}{\partial y} \ , \ \frac{\partial \phi}{\partial z} \ , \ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \ , \ \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x} \ , \ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \ , \ \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \ , \ \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \ .$$

8. **Partielle Ableitungen II**
Berechnen Sie alle partiellen Ableitungen zweiter Ordnung von
$$f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad , \quad (x, y, z) \neq (0, 0, 0) \quad .$$
Zeigen Sie außerdem:
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0 \quad .$$

9. **Kettenregel**
Wir betrachten eine differenzierbare Funktion $f(x, y)$. Zudem sei
$$\begin{aligned} x &= r \cos \phi \\ y &= r \sin \phi \end{aligned}$$
mit $r \neq 0$. Zeigen Sie :
$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial f}{\partial \phi}\right)^2 \quad .$$

10. **Extrema unter Nebenbedingungen: Lagrange-Multiplikatoren**
Die Methode der Lagrange-Multiplikatoren dient der Bestimmung von Extrema unter gegebenen Nebenbedingungen. Wir betrachten zwei einfache Beispiele:
   (a) Ein Rechteck, das unter allen Rechtecken gleichen Umfangs maximale Fläche besitzt, hat auch bei gegebener Fläche minimalen Umfang. Zeigen Sie dies, und zwar
      i. direkt, d.h. indem Sie einmal die Fläche F als Funktion des Umfangs U und einer Seitenlänge a ausdrücken bzw. entsprechend U als Funktion von F und a, und dann das Extremum der Funktion *einer* Variablen auswerten,
      ii. durch Verwendung Lagrangescher Multiplikatoren.
   (b) Maximieren Sie das Volumen eines Quaders, der gerade in das Innere des durch
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$
   definierten Ellipsoids paßt.