INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

Prof. Dr. U. Motschmann
Dipl.-Phys. S. Simon

PHYSIKALISCHE RECHENMETHODEN I — WISE 2005/2006

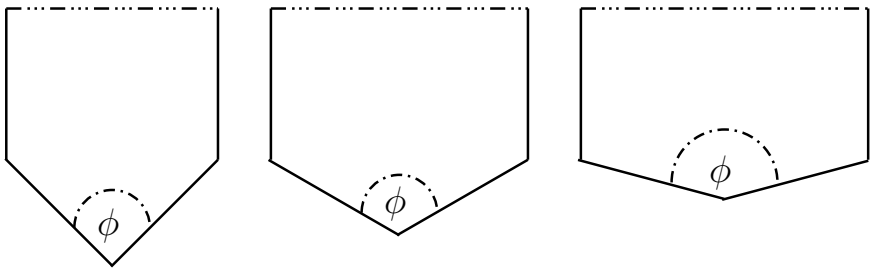
2. Übungsblatt — Besprechung am Mittwoch, d. 02.11.05

Fragen zu den Übungsaufgaben:
Sven Simon, Raum A317, Tel. 391-5187, sven.simon@tu-bs.de
Joachim Müller, Raum A225, Tel. 391-5183, joachim-mueller@online.de

3. **Unbestimmte Integrale**
Lösen Sie die folgenden unbestimmten Integrale, ohne Integraltafeln o.ä. zu verwenden:

(a) $\int \frac{1}{3} x e^{x^2+1}\,\mathrm{d}x$
(b) $\int x^3 \cos(2x)\,\mathrm{d}x$
(c) $\int \sin^4(x)\cos(x)\,\mathrm{d}x$
(d) $\int \frac{\cos(x)}{\sqrt{\sin(x)}}\,\mathrm{d}x$
(e) $\int (1+\sqrt{x})^2\,\mathrm{d}x$
(f) $\int (\sqrt[4]{x})^3\,\mathrm{d}x$
(g) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x-1}-\sqrt{x-2}}$
(h) $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,\mathrm{d}x\,;\ a \neq 0$
(i) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\,\mathrm{d}x\,;\ a \neq 0$
(j) $\int \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}\,\mathrm{d}x\,;\ a \neq 0$
(k) $\int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\,\mathrm{d}x$
(l) $\int \frac{1}{x^2-5x+6}\,\mathrm{d}x$
(m) $\int \frac{2x+3}{x^2-5x+6}\,\mathrm{d}x$
(n) $\int \frac{x}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x$
(o) $\int \frac{x^3}{x^2-3x+2}\,\mathrm{d}x$

4. **Extremwertproblem**
Aus vier gleich breiten Brettern soll eine oben offene symmetrische Rinne hergestellt werden, so daß zwei ihrer Wände parallel sind. Wie ist der Winkel ϕ der beiden anderen Wände zu wählen, damit das Fassungsvermögen der Rinne möglichst groß wird?
Hinweis: Die Aufgabe kann und soll ohne Verwendung technischer Hilfsmittel (TI 92 o.ä.) gelöst werden.



5. **Additionstheoreme für Sinus und Cosinus**
Leiten Sie aus der Beziehung $e^{i(x\pm y)} = e^{ix}e^{\pm iy}$ $(x, y \in \mathbb{R})$ die Additionstheoreme für Sinus und Cosinus her:

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y \qquad \text{und} \qquad \cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y \quad .$$

Beweisen Sie anschließend mit Hilfe der Additionstheoreme die folgenden Beziehungen:

(a) $\sin(3x) = 3\sin x - 4\sin^3 x$ und $\cos(3x) = 4\cos^3 x - 3\cos x$
(b) $\sin(4x) = 8\cos^3 x \sin x - 4\sin x \cos x$ und $\cos(4x) = 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1$
(c) $\sin\left\{\left(k+\frac{1}{2}\right)x\right\} - \sin\left\{\left(k-\frac{1}{2}\right)x\right\} = 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos(kx) \quad ; \quad k \in \mathbb{Z}$
(d) $\sin\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right\} - \sin\left(\frac{x}{2}\right) = 2\sin\left(\frac{n}{2}x\right)\cos\left(\frac{n+1}{2}x\right) \quad ; \quad n \in \mathbb{N}$
(e) Zeigen Sie unter Benutzung der Ergebnisse der Teilaufgaben (c) und (d):

$$\sum_{k=1}^{n} \cos(kx) = \frac{\sin\left(\frac{n}{2}x\right)\cos\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

für $x \neq 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.