INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

Prof. Dr. U. Motschmann
Dipl.-Phys. S. Simon

Physikalische Rechenmethoden I — WiSe 2005/2006

1. Übungsblatt — Besprechung am Mittwoch, d. 26.10.05

Fragen zu den Übungsaufgaben:
Sven Simon, Raum A317, Tel. 391-5187, sven.simon@tu-bs.de
Joachim Müller, Raum A225, Tel. 391-5183, joachim-mueller@online.de

1. **Hyperbelfunktionen**
Wir betrachten die Hyperbelfunktionen

$$\begin{aligned}\sinh(x) &= \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right) \quad \text{(Sinus Hyperbolicus);}\\ \cosh(x) &= \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) \quad \text{(Cosinus Hyperbolicus)} \quad .\end{aligned}$$

In dieser Aufgabe sollen die wichtigsten Eigenschaften beider Funktionen diskutiert werden.

(a) Skizzieren Sie den Verlauf der Funktionen $\sinh(x)$ und $\cosh(x)$.

(b) Zeigen Sie:
- $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$
- $\sinh(x \pm y) = \sinh(x)\cosh(y) \pm \cosh(x)\sinh(y)$
- $\cosh(x \pm y) = \cosh(x)\cosh(y) \pm \sinh(x)\sinh(y)$

(c) Zeigen Sie:

$$\sinh\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1}{2}\left(\cosh(x) - 1\right)} \quad .$$

Dabei ist für $x > 0$ das positive und für $x < 0$ das negative Vorzeichen zu verwenden. Zeigen Sie außerdem:

$$\cosh\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\cosh(x) + 1\right)} \quad .$$

(d) Die *Areafunktionen* sind die Umkehrfunktionen der Hyperbelfunktionen. Zeigen Sie: Die Umkehrfunktion von $\sinh(x)$ ist

$$\text{Arsinh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) \quad \text{(Areasinus Hyperbolicus)} \quad .$$

Zeigen Sie außerdem, daß die Funktion $\cosh(x)$ für $x \geq 0$ umkehrbar ist und die Umkehrfunktion durch

$$\text{Arcosh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) \quad \text{(Areacosinus Hyperbolicus)}$$

gegeben ist.

(e) Zwischen einer Funktion f und ihrer Umkehrfunktion $\bar{f}$ bestehen die Beziehungen

$$f\left(\bar{f}(x)\right) = x \quad \text{und} \quad \bar{f}\left(f(x)\right) = x \quad .$$

Rechnen Sie dies für die Hyperbelfunktionen und ihre Umkehrfunktionen explizit nach.

(f) Zeigen Sie zunächst *allgemein*, daß die Ableitungen einer Funktion f und ihrer Umkehrfunktion $\bar{f}$ durch

$$\bar{f}'(x) = \frac{1}{f'\left(\bar{f}(x)\right)} \tag{1}$$

verknüpft sind. Verifizieren Sie dann Gl. (1) für die Hyperbelfunktionen und ihre Umkehrfunktionen.

Rückseite beachten! ⟶

2. **Ableitungen der Arcusfunktionen**
   Wir betrachten die Umkehrfunktionen von Sinus, Cosinus und Tangens.

   (a) Die Umkehrfunktion von $f(x) = \sin x$ $(-\pi/2 < x < +\pi/2)$ heißt Arcussinus (arcsin). Zeigen Sie, daß die Ableitung dieser Funktion durch

   $$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

   gegeben ist. Benutzen Sie dazu wiederum die in Aufgabe 1(f) hergeleitete Beziehung.

   (b) Die Umkehrfunktion von $f(x) = \cos x$ $(0 < x < \pi)$ heißt Arcuscosinus (arccos). Zeigen Sie:

   $$\arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad .$$

   (c) Zeigen Sie, daß die erste Ableitung des Arcustangens durch

   $$\arctan'(x) = \frac{1}{x^2+1}$$

   gegeben ist.