INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

Prof. Dr. U. Motschmann
Dipl.-Phys. S. Simon

QUANTENMECHANIK I — WISE 2006/2007

4. Übungsblatt — Abgabe: keine

Fragen zu den Übungsaufgaben: S. Simon, Raum A317, Tel. 391-5187, sven.simon@tu-bs.de

9. **Poisson-Klammern**
   Es seien $A = A(\underline{q}, \underline{p}, t)$ und $B = B(\underline{q}, \underline{p}, t)$ zwei Funktionen der generalisierten Koordinaten $\underline{q} = (q_1, \ldots, q_f)$, der generalisierten Impulse $\underline{p} = (p_1, \ldots, p_f)$ und der Zeit. Dann ist die Poisson-Klammer $\{A, B\}$ von A und B durch

$$\{A, B\} = \sum_{\beta=1}^{f} \left(\frac{\partial A}{\partial q_\beta} \frac{\partial B}{\partial p_\beta} - \frac{\partial A}{\partial p_\beta} \frac{\partial B}{\partial q_\beta} \right)$$

   definiert.

   (a) Zeigen Sie, daß sich die kanonischen Bewegungsgleichungen in der Form

$$\dot{q}_\alpha = \{q_\alpha, H\} \quad \text{und} \quad \dot{p}_\alpha = \{p_\alpha, H\}$$

   schreiben lassen. Mit H wird die Hamilton-Funktion bezeichnet.

   (b) Es sei $\underline{L} = (L_1, L_2, L_3)$ der dreidimensionale Drehimpulsvektor, (q_1, q_2, q_3) der kartesische Ortsvektor und (p_1, p_2, p_3) der kanonisch konjugierte Impulsvektor. Zeigen Sie folgende Beziehungen für die Poisson-Klammern:

   i. $\{L_i, q_j\} = \sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk} q_k$ ii. $\{L_i, p_j\} = \sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk} p_k$ iii. $\{L_i, L_j\} = \sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk} L_k$.

10. **Fourier-Transformation**
   Die Fourier-Transformation $\hat{f}$ einer Funktion f ist in Dimension n definiert als

$$\hat{f}(\underline{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int \mathrm{d}^n x\, f(\underline{x})\, \mathrm{e}^{-i\underline{k}\cdot\underline{x}} \quad .$$

   Ferner ist die Faltung $f * g$ zweier Funktionen f und g definiert über

$$(f * g)(\underline{y}) = \int \mathrm{d}^n x\, f(\underline{x})\, g(\underline{y} - \underline{x}) \quad .$$

   Setzen Sie in den folgenden Teilaufgaben $n = 1$.

   (a) Sukzessives Anwenden von Fouriertransformation und Rücktransformation auf $f(x)$ sollte wieder auf $f(x)$ führen. Überprüfen Sie diese Aussage.

   (b) Beweisen Sie den Faltungssatz:

$$\widehat{(f * g)}(k) = \sqrt{2\pi}\, \hat{f}(k)\, \hat{g}(k) \quad .$$

   (c) Beweisen Sie den Differentiationssatz:

$$\widehat{(x\, f)}(k) = i(\hat{f})'(k) \quad .$$

11. **Wärmeleitungsgleichung**
   Lösen Sie die eindimensionale Wärmeleitungsgleichung

$$\kappa^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} u(x, t)$$

   für $t > 0$ mit den Randbedingungen $u(x, t = 0) = f(x)$, indem Sie eine Fouriertransformation bezüglich x durchführen. Sie erhalten eine DGL für $u(k, t)$ in t, die sich elementar integrieren läßt. Geben Sie $u(x, t)$ für beliebiges $f(x)$ und für $f(x) = f_0 = \text{const}$, $f(x) = \delta(x)$ sowie $f(x) = f_0 \exp(-\alpha x^2); \alpha > 0$ an.
   Bemerkung: $u(x, t)$ ist physikalisch entweder als Energiedichte oder Temperaturfeld zu interpretieren.