INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

Prof. Dr. U. Motschmann
Dipl.-Phys. S. Simon

QUANTENMECHANIK I — WISE 2006/2007

3. Übungsblatt — Abgabe: Donnerstag, 16.11.06 (bis 9.40 Uhr) im Kasten bei A316/A317

Fragen zu den Übungsaufgaben: S. Simon, Raum A317, Tel. 391-5187, sven.simon@tu-bs.de

6. **Wasserstoffatom I** **(4 Punkte)**
Führen Sie die Bohrsche Quantisierung für ebene Bahnen eines Elektrons im Wasserstoff-Potential

$$V(r) = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

aus. Nehmen Sie dazu Kreisbahnen an und setzen Sie Zentrifugalkraft und Coulomb-Anziehung gleich. Berechnen Sie die Energie U_n und die Geschwindigkeit v_n des Elektrons auf der n-ten Bahn und vergleichen Sie das Ergebnis mit der Lichtgeschwindigkeit c. Was folgt daraus für die Gültigkeit einer nicht-relativistischen Betrachtungsweise?

7. **Wasserstoffatom II** **(15 Punkte)**
Wir wollen nun die Bohrsche Quantisierung des Wasserstoffatoms unter Berücksichtigung des Azimuthwinkels θ durchführen. Unter der Annahme eines ruhenden Kerns bewegt sich das Elektron (Masse M_e) in dem Potential

$$V(r) = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \quad .$$

Dabei bezeichnet $r = |\underline{r}|$ den Abstand zum Ursprung des Koordinatensystems.

(a) Stellen Sie die Lagrange- und die Hamilton-Funktion dieses Systems in Kugelkoordinaten (r, θ, ϕ) auf. Verwenden Sie beim Aufstellen der Hamilton-Funktion die zu r, θ und ϕ kanonisch konjugierten Impulse p_r, p_θ und p_ϕ.

(b) Geben Sie einen vollständigen Satz von Erhaltungsgrößen an. Welche Interpretation haben diese Erhaltungsgrößen?
Hinweis: Ein eleganter Weg verwendet die Hamilton-Jacobi-Gleichung für die Wirkungsfunktion $S(r, \theta, \phi, t)$ und löst diese durch den Separationsansatz $S = W_r(r) + W_\theta(\theta) + W_\phi(\phi) - \lambda t$. Mit λ wird eine (zu bestimmende!) Konstante bezeichnet.

(c) Es sei L^2 das Quadrat des Drehimpulses, L_3 dessen Projektion auf die x_3-Achse und U die Gesamtenergie. Stellen Sie p_r, p_θ und p_ϕ als Funktion dieser Größen dar. Welchen Wertebereich hat L_3 relativ zu L? Welchen Bereich in r, θ und ϕ überstreichen die periodischen Bahnen?

(d) Führen Sie die Bohrsche Quantisierung für $J_i = \oint p_i \, \mathrm{d}q_i = \oint \frac{\partial W_i}{\partial q_i} \, \mathrm{d}q_i$ durch, d.h. setzen Sie

$$J_\phi = mh \quad , \quad J_\theta = kh \quad , \quad J_r = n'h \quad , \quad m, k, n' \in \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\} \quad .$$

Bestimmen Sie hieraus die Energieniveaus $U(n', k, m)$.
Drücken Sie die etwas üblichere *Hauptquantenzahl* n und die *Nebenquantenzahl* l durch n', k und m aus, so daß die Energie U nur von n abhängt und L nur von l. Diskutieren Sie, welche Werte für die Quantenzahlen n, l, m zugelassen (d.h. physikalisch sinnvoll) sind.
Hinweis: Folgende Integrale dürfen verwendet werden:

$$\oint \mathrm{d}x \sqrt{A - \frac{B}{x} - \frac{C}{x^2}} \;=\; 2\int_{x_1}^{x_2} \mathrm{d}x \sqrt{A - \frac{B}{x} - \frac{C}{x^2}} = -2\pi\sqrt{C} + \frac{\pi B}{\sqrt{-A}} \quad \text{und}$$

$$\oint \mathrm{d}x \sqrt{a^2 - \frac{b^2}{\sin^2 x}} \;=\; 2\int_{x_1}^{x_2} \mathrm{d}x \sqrt{a^2 - \frac{b^2}{\sin^2 x}} = 2\pi(a - |b|) \quad ,$$

wobei $x_{1,2}$ jeweils die Nullstellen des Integranden sind.

(e) Skizzieren Sie die Lage der zugelassenen Drehimpulsvektoren $\underline{L}$ in der (x_1, x_3)-Ebene für die ersten drei erlaubten Werte von L.

Rückseite beachten! ⟶

8. **Plancksches Strahlungsgesetz** **(6 Punkte)**

Um 1900 gab es für die Energiedichte $u(\omega, T)$ der Strahlung mit Frequenz ω eines schwarzen Körpers der Temperatur T verschiedene Formeln. Das Gesetz von *Rayleigh-Jeans*

$$u(\omega, T) = \frac{\omega^2 kT}{\pi^2 c^3}$$

basiert auf klassischen Betrachtungen und funktioniert gut bei hohen Temperaturen ($\hbar\omega \ll kT$). *Max Planck* gab mit seiner Strahlungsformel einen wichtigen Anstoß für die Entwicklung der Quantenmechanik. Im folgenden soll eine alternative Herleitung des Strahlungsgesetzes nach *A. Einstein* diskutiert werden. Wir betrachten dazu zwei Zustände U_m, U_n eines Atoms mit diskreten Energieniveaus, wobei wir $U_m > U_n$ annehmen. Gegeben sei nun ein System von N Atomen. Es sei N_j die Anzahl der Atome im Zustand U_j zum Zeitpunkt t. Ein Atom kann von dem höheren Zustand in den niedrigeren übergehen, indem es ein Lichtquant $\hbar\omega = U_m - U_n$ emittiert. Die Anzahl $\mathrm{d}N'_e$ der *spontanen* Emissionen eines solchen Quants im Zeitintervall $\mathrm{d}t$ bezeichnen wir mit

$$\mathrm{d}N'_e = N_m a_m^n \mathrm{d}t \quad .$$

Mit a_m^n wird eine Konstante bezeichnet. Ein äußeres Strahlungsfeld der Energiedichte $u(\omega, T)$ kann zudem Übergänge $m \to n$ *induzieren*. Bezeichnen wir die Anzahl der induzierten Emissionen in der Zeit $\mathrm{d}t$ mit $\mathrm{d}N''_e$, so ist die Gesamtzahl der Emissionen

$$\mathrm{d}N_e = \mathrm{d}N'_e + \mathrm{d}N''_e \quad .$$

Schließlich kann ein Lichtquant bei einem Übergang $n \to m$ *absorbiert* werden. Die Anzahl der Absorptionen im Zeitintervall $\mathrm{d}t$ bezeichnen wir mit $\mathrm{d}N_a$. Einstein nahm nun an, daß die Übergangsraten für die durch das Strahlungsfeld induzierten Übergänge proportional zur Energiedichte sind, d.h.

$$\mathrm{d}N_a = N_n b_n^m u(\omega, T)\mathrm{d}t \quad , \qquad \mathrm{d}N''_e = N_m b_m^n u(\omega, T)\mathrm{d}t \quad .$$

(a) Stellen Sie die Bedingung für Stationarität auf, d.h. dafür, daß sich N_m und N_n durch die Wechselwirkung mit dem Strahlungsfeld nicht mit der Zeit ändern. Drücken Sie diese Bedingung durch die Größen N_n N_m, a_m^n, b_m^n, b_n^m und $u(\omega, T)$ aus.

(b) Die Besetzungszahlen N_j sind gegeben durch die *Boltzmann*-Verteilung

$$N_j \propto \mathrm{e}^{-\frac{U_j}{kT}} \quad .$$

Setzen Sie dies in die Gleichgewichtsbedingung ein. Lösen Sie die Gleichgewichtsbedingung nach $u(\omega, T)$ auf und leiten Sie durch Betrachtung des Grenzfalls $T \to \infty$ eine Beziehung zwischen den Koeffizienten b_n^m und b_m^n her.
Hinweis: Sie dürfen eingangs genannte Eigenschaften für die Asymptotik von $u(\omega, T)$ verwenden.

(c) Bestimmen Sie die in $u(\omega, T)$ auftretenden Koeffizienten durch Vergleich mit dem klassischen Grenzfall $kT \gg \hbar\omega$ und reproduzieren Sie das Ergebnis für $u(\omega, T)$ aus der Vorlesung.