INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

Prof. Dr. U. Motschmann
Dipl.-Phys. S. Simon

QUANTENMECHANIK I | WISE 2006/2007

2. Übungsblatt | Abgabe: keine

Fragen zu den Übungsaufgaben: S. Simon, Raum A317, Tel. 391-5187, sven.simon@tu-bs.de

4. **Hamilton-Jacobi-Gleichung: Freier Fall**
   Betrachten Sie die Bewegung eines Massenpunktes der Masse m im homogenen Schwerefeld $V(z) = -mgx_3$ der Erde. Bestimmen Sie die Bahnkurve $(x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ des Massenpunktes durch Lösen der Hamilton-Jacobi-Gleichung.

5. **Bohrsche Quantisierung: Eindimensionaler harmonischer Oszillator**
   Betrachten Sie den eindimensionalen harmonischen Oszillator, d.h. einen Massenpunkt m, der sich im Potential $V(q) = \frac{k}{2}q^2$ bewegt.

   (a) Stellen Sie für dieses System die Lagrange-Funktion und die Lagrange-Bewegungsgleichung zweiter Art auf.

   (b) Zeigen Sie, daß die Hamilton-Funktion durch $H(p,q) = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}q^2$ gegeben ist. Stellen Sie die kanonischen Gleichungen auf und zeigen Sie, daß diese zur Lagrange-Bewegungsgleichung äquivalent sind.

   (c) Bestimmen Sie für dieses System das Phasenraumintegral

   $$J = \oint p \, \mathrm{d}q$$

   über eine volle Periode.

   (d) Die *Bohr-Sommerfeldsche Quantisierungsbedingung* besagt, daß für periodische Bewegungen $J = nh$ gilt, wobei h das Planck'sche Wirkungsquantum und $n = 0, 1, 2, \ldots$ eine natürliche Zahl ist. Wenden Sie die Bohrsche Quantisierungsregel auf den harmonischen Oszillator an. Berechnen Sie Energie, Periode und Amplitude der quantisierten Bahnen.

   (e) Stellen Sie die Hamilton-Jacobi-Gleichung für den harmonischen Oszillator auf. Begründen Sie: Für die Wirkungsfunktion $S(q,t)$ gilt

   $$S(q,t) = W(q) - \alpha t \quad .$$

   Geben Sie insbesondere die Konstante α an.

   (f) Begründen Sie: Für das Phasenraumintegral J aus Teilaufgabe (c) gilt

   $$J = \oint \frac{\partial W}{\partial q} \, \mathrm{d}q \quad .$$

   Bestimmen Sie aus dieser Gleichung erneut den Wert von J.
   Hinweis: Integrale vom Typ

   $$\int \sqrt{a^2 - x^2} \, \mathrm{d}x$$

   löst man mit der Substitution $x = a \sin \xi$.