INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

Prof. Dr. U. Motschmann
Dipl.-Phys. S. Simon

Quantenmechanik I — WiSe 2006/2007

1. Übungsblatt — Abgabe: Donnerstag, 09.11.06 (bis 9.40 Uhr) im Kasten bei A316/A317

Fragen zu den Übungsaufgaben: S. Simon, Raum A317, Tel. 391-5187, sven.simon@tu-bs.de

1. **Eigenwerte und Eigenvektoren** **(3 Punkte)**
   Wir betrachten die Matrix

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \quad .$$

   Bestimmen Sie die Eigenwerte und die normierten Eigenvektoren von $\underline{\underline{A}}$. Geben Sie außerdem eine unitäre 3×3-Matrix $\underline{\underline{U}}$ an, die $\underline{\underline{A}}$ auf Diagonalgestalt transformiert. Das bedeutet: $\underline{\underline{U}} \cdot \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{U}}^+$ darf nur Diagonalelemente enthalten. Die zu $\underline{\underline{U}}$ *adjungierte* Matrix $\underline{\underline{U}}^+$ ist durch $\underline{\underline{U}}^+ = \left(\underline{\underline{U}}^T\right)^\star$ definiert, d.h. $\underline{\underline{U}}$ wird transponiert und dann die Matrixelemente komplex konjugiert.

2. **Polarkoordinaten** **(4 Punkte)**
   In einer Ebene mit den kartesischen Koordinaten (x, y) sind die Polarkoordinaten (r, ϕ) durch

$$x = r\cos\phi \qquad (1)$$
$$y = r\sin\phi \qquad (2)$$

   definiert.

   (a) Berechnen Sie die Ableitungen

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\phi)} \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \phi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \phi} \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial(r,\phi)}{\partial(x,y)} \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial r}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi}{\partial x} & \frac{\partial \phi}{\partial y} \end{pmatrix}$$

   als Funktionen von r und ϕ. Beachten Sie: Es ist hierzu *nicht* nötig, die Gleichungen (1) und (2) nach r und ϕ aufzulösen.

   (b) Betrachten Sie das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \alpha\, x(t) - \beta\, y(t) \\ \dot{y}(t) &= \alpha\, y(t) + \beta\, x(t) \quad . \end{aligned} \qquad (3)$$

   Transformieren Sie das System (3) auf Polarkoordinaten und lösen Sie es für die Anfangswerte $r(t = 0) = a$, $\phi(t = 0) = 0$.

3. **Die Exponentialfunktion** **(13 Punkte)**
   Für eine quadratische Matrix $\underline{\underline{A}}$ definieren wir den Ausdruck $\exp\left(\underline{\underline{A}}\right)$ als Potenzreihe:

$$\exp\left(\underline{\underline{A}}\right) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\, \underline{\underline{A}}^{\,k} \quad .$$

   (a) Zeigen Sie: Vertauschen die beiden Matrizen $\underline{\underline{A}}$ und $\underline{\underline{B}}$ miteinander, d.h. ist $\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}} = \underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{A}}$, so gilt das Additionstheorem

$$\exp\left(\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}}\right) = \exp\left(\underline{\underline{A}}\right) \cdot \exp\left(\underline{\underline{B}}\right) \quad .$$

Rückseite beachten! ⟶

(b) Zeigen Sie: Für eine spurfreie 2×2-Matrix

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \quad \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

ist

$$\exp\left(\underline{\underline{A}}\right) = \begin{cases} \cosh(w)\,\underline{\underline{1}} + \frac{\sinh(w)}{w}\,\underline{\underline{A}} & \text{für} \quad \det \underline{\underline{A}} < 0 \\ \underline{\underline{1}} + \underline{\underline{A}} & \text{für} \quad \det \underline{\underline{A}} = 0 \\ \cos(w)\,\underline{\underline{1}} + \frac{\sin(w)}{w}\,\underline{\underline{A}} & \text{für} \quad \det \underline{\underline{A}} > 0 \end{cases} \tag{4}$$

mit

$$w = \sqrt{\left|\det \underline{\underline{A}}\right|} \qquad \text{und} \qquad \underline{\underline{1}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad .$$

Hinweis: Nutzen Sie aus, daß $\underline{\underline{A}}^2$ ein Vielfaches der Einheitsmatrix ist.

(c) Die Beziehung (4) soll noch auf einem alternativen Weg hergeleitet werden. Nutzen Sie dafür aus, daß $\underline{\underline{A}}$ diagonalisierbar ist. Das bedeutet: Es existiert eine invertierbare Matrix $\underline{\underline{S}} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, so daß

$$\underline{\underline{S}}^{-1} \cdot \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{S}} = \underline{\underline{D}}$$

eine Diagonalmatrix ist. Zeigen Sie zunächst:

$$\exp\left(\underline{\underline{A}}\right) = \underline{\underline{S}} \cdot \exp\left(\underline{\underline{D}}\right) \cdot \underline{\underline{S}}^{-1} \quad .$$

Überlegen Sie sich dann, wie man $\exp\left(\underline{\underline{D}}\right)$ für Diagonalmatrizen $\underline{\underline{D}}$ berechnet und reproduzieren Sie Gl. (4).

(d) Berechnen Sie $\exp\left(\underline{\underline{B}}\right)$ für eine allgemeine 2×2-Matrix

$$\underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \in \mathbb{R}^{2\times 2} \quad .$$

Hinweis: Schreiben Sie dazu $\underline{\underline{B}}$ als

$$\underline{\underline{B}} = \xi\,\underline{\underline{1}} + \underline{\underline{A}}_0$$

mit $\xi \in \mathbb{R}$ und einer spurfreien Matrix $\underline{\underline{A}}_0$, und wenden Sie das Additionstheorem aus Teil (a) an.

(e) Machen Sie sich klar, daß die Lösung eines Differentialgleichungssystems $\dot{\underline{r}} = \underline{\underline{C}} \cdot \underline{r}$ in der Form

$$\underline{r}(t) = \exp\left(t\,\underline{\underline{C}}\right) \cdot \underline{r}(t=0)$$

geschrieben werden kann. Berechnen Sie dann mit Hilfe der in Teil (d) gefundenen Formel die Lösung des in Aufgabe 2(b) betrachteten Differentialgleichungssystems

$$\dot{\underline{r}} = \underline{\underline{C}} \cdot \underline{r} \qquad \text{mit} \qquad \underline{\underline{C}} = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \quad .$$

Die Anfangsbedingungen seien wiederum $x(t=0) = a$, $y(t=0) = 0$.

Allgemeine Hinweise zum Übungsbetrieb

- Mit Fragen zur Vorlesung und zu den Übungsaufgaben können Sie sich wenden an:

Name	Raum	Tel.	Mail
Michael Dorn	A 225	391-5183	m-dorn@t-online.de
Jörg Duhme	-	-	j.duhme@tu-bs.de
Hendrik Kriegel	-	-	hendrik_kriegel@gmx.net
Prof. Dr. Uwe Motschmann	A 312	391-5186	u.motschmann@tu-bs.de
Sven Simon	A 317	391-5187	sven.simon@tu-bs.de

- Abgabe der Hausaufgaben: jeweils am Donnerstag bis 9:40 Uhr, im Briefkasten zwischen Raum A316 und A317 (Mendelssohnstr. 3, 3. Etage)
- Übungsklausur: Donnerstag, 25.01.07 (9:45-11:15 Uhr) in MS 3.1 (Teilnahme freiwillig!)
- Abschlußklausur: Mittwoch, 21.02.07 (9:00-12:00 Uhr) in MS 3.1