INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

Prof. Dr. U. Motschmann
Dipl.-Phys. T. Bagdonat

QUANTENMECHANIK WS 2000/2001

8. Übungsblatt Abgabe: Freitag, 15.12.2000, bis 9^{45} Uhr

Sprechstunde: T. Bagdonat, A317, Dienstag ab 14^{00} Uhr, Tel.: 391-5187
Ein Link zu dieser Vorlesung: `http://www.tu-bs.de/institute/theophys/edu.html`

15. **Potential mit Delta-Funktion**

    Gegeben sei ein Potential der Form

    $$V(x) = -v_0 \delta(x - x_0) \qquad .$$

    Gesucht sind die gebundenen Zustände $\Psi(x)$ mit $U < 0$.

    (a) Zeigen Sie, daß unter der Bedingung, daß $\Psi(x)$ stetig sein muß, folgt:

    $$\lim_{\varepsilon \to 0} \left. \frac{d\Psi}{dx} \right|_{x_0+\varepsilon} - \lim_{\varepsilon \to 0} \left. \frac{d\Psi}{dx} \right|_{x_0-\varepsilon} = -\frac{2m}{\hbar^2} v_0 \Psi(x_0) \qquad .$$

    (b) Bestimmen Sie nun die Energieeigenwerte und Eigenfunktionen für dieses Potential.

16. **Der Folgenraum ℓ_2**

    (a) Zeigen Sie, daß der in der VL eingeführte Raum ℓ_2 ein Hilbertraum ist.

    (b) Sind die Kets

    $$|A\rangle = \left\{ \frac{1}{n} \right\}_{n=1}^{n=\infty} \qquad \text{bzw.} \quad |B\rangle = \left\{ \frac{1}{\sqrt{n}} \right\}_{n=1}^{n=\infty}$$

    Elemente des ℓ_2 und wenn ja, bestimmen Sie $||A||$ bzw. $||B||$.

17. **Vektorräume $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{C}^n$**

    Im $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{C}^n$ kann man die Kets einfach als n-Spaltentupel (die bekannten Spaltenvektoren bezüglich der Einheitsbasis) und die Bras als die entsprechenden (komplex konjugierten) n-Zeilentupel darstellen. Ein Operator $\hat{A}$ wird durch eine $n \times n$ Matrix $\underline{\underline{A}}$ dargestellt (wiederum bezüglich der Einheitsbasis). $\langle a|b\rangle$ sei das traditionelle Skalarprodukt.

    (a) Zeigen Sie, daß in beiden Räumen

    $$Sp\left(|a\rangle\langle b|\right) = \langle b|a\rangle$$

    gilt. ($Sp(\hat{A})$ bezeichnet die Spur der Matrix $\underline{\underline{A}}$).

    (b) Zeigen Sie, daß der adjungierte Operator $\hat{A}^+$ im $\mathbb{R}^n$ der Matrix $\underline{\underline{A}}^T$ und im $\mathbb{C}^n$ der Matrix $\left(\underline{\underline{A}}^T\right)^*$ entspricht.

    (c) Zeigen Sie weiterhin, daß im $\mathbb{R}^n$

    $$\hat{A}|\Psi\rangle = a|\Psi\rangle \quad \Rightarrow \quad \langle\Psi|\hat{A}^+ = a\langle\Psi|$$

    bzw. im $\mathbb{C}^n$

    $$\hat{A}|\Psi\rangle = a|\Psi\rangle \quad \Rightarrow \quad \langle\Psi|\hat{A}^+ = a^*\langle\Psi|$$

    gilt.