INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

Prof. Dr. U. Motschmann
Dipl.-Phys. T. Bagdonat

Quantenmechanik — WS 2000/2001

7. Übungsblatt — Abgabe: Freitag, 8.12.2000, bis 9^{45} Uhr

Sprechstunde: T. Bagdonat, A317, Dienstag ab 14^{00} Uhr, Tel.: 391-5187
Ein Link zu dieser Vorlesung: `http://www.tu-bs.de/institute/theophys/edu.html`

12. **H-Atom**

Die in der Vorlesung angegebenen Zustände des H-Atoms mit $l = 1$ entsprechen den bekannten p-Orbitalen. Die zugehörigen Winkelanteile seien mit

$$p_z(\vartheta,\varphi) = Y_1^0(\vartheta,\varphi)$$
$$p_\pm(\vartheta,\varphi) = Y_1^{\pm 1}(\vartheta,\varphi)$$

bezeichnet, wobei in der gesamten Aufgabe die diversen Normierungskonstanten außer acht gelassen werden sollen.

(a) Skizzieren Sie grob die Winkelabhängigkeit von $|\Psi|^2$, die zu p_z, p_+ und p_- gehört. Für p_z erhält man die bekannte Keulenform. Die Aufenthaltswahrscheinlichkeit für $p_\pm$ sieht aber nicht so aus, wie man das erwartet. Dies liegt daran, daß diese Funktionen nur eine von vielen möglichen Basiszuständen darstellt. Die bekannten p_x und p_y Orbitale sind eine andere mögliche Basis.

(b) Überlegen Sie, wie die Funktionen $p_x(\vartheta,\varphi)$ und $p_y(\vartheta,\varphi)$ aussehen müßten, um die bekannte Keulenform in x- bzw. y-Richtung zu erhalten. Zeigen Sie, daß gilt:

$$p_\pm = p_x \pm i p_y \quad .$$

13. **Tunneleffekt**

Man betrachte eine Potentialbarriere der Form

$$\hat{V}(x) = \begin{cases} V_0 & \text{für} \quad 0 < x < a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad .$$

Ein von links kommendes Teilchen der Masse m und der Energie $0 < U < V_0$ würde klassisch betrachtet an der Barriere abprallen. Quantenmechanisch tunnelt das Teilchen jedoch mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit durch die Barriere hindurch. Dies soll näher untersucht werden.

Als Ansatz zur Lösung der Schrödingergleichung benutze man im linken Teil ($x < 0$) eine Überlagerung von ein- und auslaufender Welle. Im Bereich $0 < x < a$ kommt der bekannte Ansatz für $U < V_0$ zum Einsatz, während im rechten Teil ($x > a$) nur eine auslaufende Welle angesetzt werden soll. Sei A die Amplitude der von links einlaufenden Wellenfunktion und C die der nach rechts auslaufenden. Zeigen Sie, daß für den Transmissionskoeffizienten (Tunnelwahrscheinlichkeit)

$$T = \frac{|C|^2}{|A|^2} = \frac{1}{\cosh^2(\gamma a) + \frac{1}{4}\left(\frac{\gamma}{a} - \frac{a}{\gamma}\right)^2 \sinh^2(\gamma a)} \quad , \quad \gamma = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(V_0 - U)}$$

gilt.

14. **Zweidimensionaler harmonischer Oszillator**

Es sollen die Eigenzustände des zweidimensionalen harmonischen Oszillators mit dem Potential $\hat{V}(x,y) = k/2(x^2 + y^2)$ bestimmt werden.

(a) Bestimmen Sie die Eigenfunktionen, Energieeigenwerte und Entartungsgrad in kartesischen Koordinaten mittels eines Separationsansatzes. Man gelangt zu denselben Differentialgleichungen wie im eindimensionalen Fall, deren bekannte Lösungen natürlich zu verwenden sind.

(b) Führen Sie dieselbe Rechnung nochmals in Polarkoordinaten aus. Separieren Sie ähnlich wie beim H-Atom in Radial- und Winkelanteil und bestimmen Sie die allgemeine Lösung für den Winkelanteil.

(c) Zur Lösung der Differentialgleichung des Radialteils gehe man genauso vor wie in der Vorlesung beim H-Atom. Bestimmen Sie so wiederum die Energieeigenwerte und den Entartungsgrad, aber nicht die expliziten Lösungen für den Radialteil (wer den in der Literatur findet, kann ihn ja noch dazuschreiben).