INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

Prof. Dr. U. Motschmann
Dipl.-Phys. T. Bagdonat

QUANTENMECHANIK WS 2000/2001

5. Übungsblatt Abgabe: Freitag, 24.11.2000, bis 9^{45} Uhr

Sprechstunde: T. Bagdonat, A317, Dienstag ab 14^{00} Uhr, Tel.: 391-5187
Ein Link zu dieser Vorlesung: `http://www.tu-bs.de/institute/theophys/edu.html`

8. **Ehrenfestsches Theorem**

   Gegegeben seien die beiden Hamilton-Operatoren

$$\text{(a)}\quad \hat{\mathcal{H}} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\left(\omega_1^2\hat{x}^2 + \omega_2\hat{x} + \epsilon\right)$$

$$\text{(b)}\quad \hat{\mathcal{H}} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2 - \frac{A}{\hat{x}^2}$$

   Bestimmen Sie die Bewegungsgleichungen für die Mittelwerte $\langle\hat{x}\rangle$ und $\langle\hat{p}\rangle$ und lösen Sie diese für den Fall (a).

9. **Unendlich hoher Potentialkasten**

   Zeigen Sie, daß für die Zustände im unendlich hohen Potentialkasten, die in der Vorlesung angegeben wurden, für große n die Beziehung

$$\Delta p \Delta x \sim \hbar n$$

   gilt, wenn n die Quantenzahl des betrachteten Zustands ist.

10. **Endlich hoher Potentialkasten**

    Gegeben Sei das Potential

$$V(x) = \begin{cases} V_0 & \text{für} \quad x < -l \quad \text{(I)} \\ 0 & \text{für} \quad -l \le x \le l \quad \text{(II)} \\ V_0 & \text{für} \quad l > a \quad \text{(III)} \end{cases} \qquad , \quad V_0 > 0 \quad .$$

    Es sollen einige Eigenschaften der Lösungen der eindimensionalen, stationären Schrödingergleichung für $0 < E < V_0$ diskutiert werden. Gehen Sie dazu folgendermaßen vor:

    (a) Als allgemeine Lösungen in den Bereichen (I)-(III) setze man an:

$$\Psi_I = Ae^{qx} + \tilde{A}e^{-qx}$$
$$\Psi_{II} = Be^{ikx} + Ce^{-ikx}$$
$$\Psi_{III} = \tilde{D}e^{qx} + De^{-qx}$$

    Bestimmen Sie q und k als Funktion der Energie E. Warum müssen $\tilde{A}$ und $\tilde{D}$ null sein?

    (b) Es läßt sich zeigen, daß an den Unstetigkeitsstellen von V sowohl Ψ als auch $\partial\Psi/\partial x$ stetig sein müssen. Stellen Sie unter diesen Bedingungen ein Gleichungssystem für A, B, C und D auf.

(c) Es sollen nun die nichttrivialen Lösungen dieses Gleichungssystems bestimmt werden. Zeigen Sie, daß es genau zwei Arten von solchen Lösungen gibt, und zwar symmetrische und antisymmetrische *ohne* diese explizit zu bestimmen.

(d) Zeigen Sie weiterhin, daß für die symmetrischen Lösungen

$$q = k \tan(kl)$$

und für die antisymmetrischen

$$q = -k \cot(kl)$$

gelten muß. Zeigen Sie, daß außerdem gilt:

$$q = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} V_0 - k^2}$$

(e) Die obigen Bedingungen liefern im Prinzip die Lösungen für die Energieeigenwerte E_n. Jedoch sind die Gleichungen transzendent. Man kann aber einige Eigenschaften aus einer graphischen Lösung ablesen. Begründen Sie mittels dieser graphischen Lösung:

- Es gibt immer mindestens einen und höchstens endlich viele diskrete Energieeigenwerte.
- Der Zustand mit der niedrigsten Energie ist symmetrisch
- Die folgenden Zustände sind immer abwechselnd antisymmetrisch und symmetrisch.