INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

Prof. Dr. U. Motschmann
Dipl.-Phys. T. Bagdonat

QUANTENMECHANIK — WS 2000/2001

2. Übungsblatt — Abgabe: Freitag, 3.11.2000, bis 9^{45} Uhr

Sprechstunde: T. Bagdonat, A317, Dienstag ab 14^{00} Uhr, Tel.: 391-5187
Ein Link zu dieser Vorlesung: `http://www.tu-bs.de/institute/theophys/edu.html`

2. **Klassische Lebensdauer eines Wasserstoffatoms**

   In der Vorlesung wurde erwähnt, daß gemäß der klassichen Physik das Elektron eines Wasserstoffatoms auf seiner Bahn Energie abstrahlen würde und somit in den Kern stürzt. Die Zeit, die es dafür braucht, soll abgeschätzt werden. Wir betrachten also das klassische Modell eines Elektrons, daß im Abstand a_0 (Bohrscher Radius) um ein Proton kreist.

   (a) Berechnen Sie die Kreisfrequenz für die Bahnbewegung des Elektrons.

   (b) Eine beschleunigtes Elektron strahlt gemäß dem Larmorschen Theorem

   $$d_t U = -\frac{2}{3}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{c^3}\underline{\ddot{x}}^2$$

   Energie ab.

   Wir nehmen an, daß die charakteristische Zeit, mit der sich das Elektron zum Kern hinbewegt sehr viel größer ist als die in (a) berechnete Umlaufzeit. Das legt nahe, alle Größen während eines Umlaufs zu mitteln. Auf diese Weise gelangt man über die Bewegungsgleichung auf eine Differentialgleichung für den Kernabstand $a(t)$, aus der sich die Zeit τ ergibt, nach der das Elektron den Kern erreicht. Weiterhin benötigt man noch den Virialsatz für ein $1/r$-Potential:

   $$2\langle T_{kin}\rangle = -\langle V\rangle \quad .$$

   Die $\langle\rangle$ bezeichnen die erwähnte Mittelung über einen Umlauf. Geben Sie τ an.

   Hinweis: Für das Ausrechnen der Zahlenwerte lohnt sich ein Blick auf die Seiten
   `http://www.astro.wisc.edu/~dolan/constants/calc.html`
   `http://www.chemie.fu-berlin.de/chemistry/general/constants.html`

3. **Fourierreihen**

   Die Menge aller Funktionen $f(x)$, die auf dem Intervall $[-\pi;\pi]$ definiert sind, stellen einen Vektorraum dar. Eine wohlbekannte vollständige und orthogonale Basis für diesen Raum sind die Funktionen

   $$b_0(x) = cos(0x) = 1 \quad b_1 = sin(1\cdot x) \quad b_2 = cos(1\cdot x) \quad b_3 = sin(2\cdot x) \quad \text{usw.}$$

   Das Skalarprodukt in diesem Raum sei definiert als

   $$\langle f|g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot g(x)\,dx \quad .$$

Jede Funktion ist in dieser Basis darstellbar, d.h.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n(x) \quad .$$

Dies ist die bekannte Fourierreihendarstellung.

(a) Geben Sie eine Gleichung an, mit der man die a_n bestimmt (die man natürlich in sehr vielen Büchern findet, sie soll aber hier mittels der dualen Basis abgeleitet werden).

(b) Bestimmen Sie die a_n für die Funktion $f(x) = x^2$.

(c) Geben Sie die Form der zum Operator $\hat{D} = d/dx$ (Einmaliges Differenzieren nach x) gehörenden Matrix an.

(d) Wenden Sie den Operator in Matrixform auf die Funktion $f(x) = x^2$ an und vergleichen Sie mit dem bekannten Ergebnis (indem Sie die zu $g(x) = 2x$ gehörenden Koeffizienten bestimmen). Bei diesem Teil ist eine präzise mathematische Behandlung recht umständlich. Es ist einfacher, ein paar Elemente des entstehenden Vektors zu bestimmen und dann auf die allgemeine Form zu schließen.

Hinweis: Zum Lösen der vielen Integrale in dieser Aufgabe ist es nicht nur erlaubt, sondern auch empfohlen, eine Formelsammlung oder noch besser ein Programm wie z.B. Mathematica zu verwenden.